Documento de Trabajo

Número 4
Octubre 2010

www.iefweb.org/odf

Introducción a los derivados sobre volatilidad; definición, valoración y cobertura estática

Jordi Planagumà i Vallsquer

Este artículo es una introducción al mundo de los derivados sobre volatilidad. Se verán las definiciones de los *swaps* de volatilidad *(volatility swaps)* y de varianza *(variance swaps)*. Para los *swaps* de varianza se presenta cómo calcular el precio del producto y como construir su cobertura estática a través de una cartera réplica, en este punto se verá la relación existente entre la gestión tradicional de carteras de opciones simples *(vanilla)* y el mundo de los *swaps* de varianza.

Introducción

De todos es conocido el salto que supuso en la década de los setenta la aportación de Black–Scholes (1973) en el mundo de la evaluación de los derivados. A pesar de reconocer la vigencia del uso de su fórmula, podemos destacar que uno de sus puntos controvertidos es la asunción de volatilidad constante, que ha demostrado ser del todo falsa, pero que las mejoras introducidas en el modelo (por ejemplo la construcción de superficies de volatilidad) han permitido su aplicabilidad a lo largo de más de tres décadas. La parte positiva de esta hipótesis es que facilita enormemente el cálculo y permite conseguir una fórmula bastante intuitiva y de rápida aplicación. La vertiente negativa es la rigidez que confiere al modelo ya que la realidad en el mundo de los derivados demuestra que las distribuciones de probabilidades de los activos suelen tener distintas patologías: la falta de simetría en las distribuciones, los saltos, las colas pesadas y la dependencia de la volatilidad tanto en el tiempo como en el plano del activo [(1)].

Objetivo

Se pretende desarrollar los derivados que podemos llamar de segunda generación, concretamente el caso de los derivados sobre volatilidad. Los definiremos, hablaremos de su precio y de cuál es su cobertura, así como se analizará la relación entre los derivados sobre volatilidad y los derivados estándares *(vanilla)*. Todo ello desde la perspectiva del "mundo" Black–Scholes y utilizando la formulación tradicional de valoración de derivados.

La vega dentro del mundo Black–Scholes

Usar el modelo de Black–Scholes (BS) implicará considerar para la gestión todas las derivadas parciales (sensibilidades) de la fórmula de BS en los distintos parámetros de la opción. La delta y la gamma, primera y segunda derivada de la prima respeto al subyacente, la theta, sensibilidad al tiempo, y la vega, sensibilidad a la volatilidad.

A pesar de la hipótesis (poco realista) de considerar que es posible la cobertura continua y sin costes de transacción, la gestión por griegas, tanto la de delta cono la de gamma, resulta desde un punto de vista práctico bastante factible.

Contrariamente, la gestión de la vega ya presenta desde un primer momento un problema de definición. Para aplicar la gestión delta–gamma sólo es necesario comprar/vender la can-

Observatorio de Divulgación Financiera

tidad de subyacente determinado por las expresiones derivadas de la fórmula de BS; no es así con la vega, dado que no es posible comprar o vender volatilidad directamente como si de un activo se tratara. Así pues, ¿Qué alternativas existen para la gestión de la vega?

En primera instancia podríamos asumir totalmente la hipótesis de volatilidad constante y por tanto considerar que la opción tiene riesgo ligado al movimiento del subyacente pero no a la volatilidad [2]. Otra vía es usar otras opciones para conseguir una cartera que tenga una vega neutra; es decir, posiciones en otras opciones que tengan una vega equivalente pero en sentido contrario. Este camino sería correcto si la hipótesis de volatilidad constante (en tiempo, nivel de subyacente y *strike*) fuese cierta. Por lo tanto lo que acabamos teniendo es una cartera de n opciones y n subyacentes con una vega igual a la suma de vegas de las opciones que la conforman.

En resumen, se tiene un producto con sensibilidad a un parámetro que no es directamente observable, que no se puede comprar/vender directamente, que es difícil de estimar estadísticamente y que modelizarlo es muy complejo.

Tipologías de volatilidad

Viendo que será difícil la gestión de la vega directamente, se puede (dando por buenas las hipótesis de BS) gestionar la cartera de opciones siguiendo estrictamente la delta y la gamma en cada momento, esperando que esta cobertura proporcione un resultado independiente de la volatilidad. Dicha gestión conduce a considerar tres volatilidades distintas.

En primer lugar, la que se aplica a la formulación de BS y que da unos niveles de delta y gamma que se usarán para gestionar la posición, la llamaremos σ_{bs}; en segundo lugar, la volatilidad propia del activo σ_R, que formalmente podemos definir como la desviación estándar anualizada de los rendimientos del subyacente en un cierto periodo de tiempo. Ésta última, la podemos llamar volatilidad realizada. Y finalmente, la volatilidad efectivamente capturada por nuestra gestión σ_g [3], se calcula de forma análoga a la realizada pero los precios usados para calcular la desviación son aquellos a los que el gestor ha operado.

Por tanto, vemos que las opciones están condicionadas por la volatilidad, su resultado depende enormemente de ella, pero no dan de forma sencilla la exposición pura a este parámetro. Así pues, el resultado por vega será una expresión que dependerá de la diferencia de estas volatilidades. ¿Cómo será esta expresión? ¿Y cómo se puede conseguir tener exposición directa y única en la volatilidad?

Permuta financiera *(swap)* de volatilidad

La respuesta se encuentra en los derivados sobre la volatilidad. Se introducirán primero los *swaps* de volatilidad, que básicamente son contratos *forward* sobre la volatilidad realizada futura, los cuales dan únicamente exposición a la volatilidad.

Un *swap* de volatilidad *(volatility swap)* sobre un activo es un contrato *forward* sobre la volatilidad anualizada, que tiene por pago *(payoff)*:

$$N \times \left(\sigma_R\left(S\right) - K_{vol}\right) \qquad \text{(Eq. 1)}$$

donde $\sigma_R(S)$ es la volatilidad realizada por el activo (anualizada) formalmente:

$$\sigma_R\left(S\right) = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t^2 \, dt} \qquad \text{(Eq. 2)}$$

donde σ_t es la volatilidad estocástica del activo, K_{vol} es la volatilidad anualizada de entrega y N es el nominal del contrato. Así, quien compra el *swap* de volatilidad recibirá N euros por cada punto que la volatilidad del activo σ_R (S) supere la de entrega (K_{vol}), respectivamente pagará N euros por cada punto K_{vol} que supere a σ_R (S). Por lo tanto se está intercambiando ("swapeando") un nivel de volatilidad fijo (K_{vol}) por un nivel de volatilidad futura σ_R (S), similar a lo que se hace en un *swap* de tipos de interés.

En la práctica hay que aclarar cómo se procederá a calcular el término σ_R (S). En la ecuación 2 se encuentra la expresión continua de la volatilidad que se usará para hacer la modelización, pero para calcular la liquidación se usará una versión discreta, en la cual es preciso especificar:

- La frecuencia de observación (lo más habitual es considerar datos diarios y precios de cierre).
- El factor de anualización (se puede considerar que un año corresponde a 252 sesiones, a 260 sesiones, etc.).
- La media, en el cálculo de la desviación estándar se resta a cada dato la media de los retornos. Se simplificará el cálculo con la hipótesis de media cero. Esta simplificación será de gran utilidad para encontrar una cartera réplica que permita valorar el producto.

Swaps de varianza *(variance swaps)*

A parte de los *swaps* de volatilidad, también se negocian los *swaps* de varianza *(variance swaps)* que son un contrato *forward* sobre la varianza anualizada y que tiene por *payoff*:

$$N \times \left(\sigma_R^2(S) - K_{\text{var}}\right) \qquad \text{(Eq. 3)}$$

donde $\sigma_R^2(S)$ es la varianza realizada por el activo (anualizada), de forma continua:

$$\sigma_R^2(S) = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t^2 \, dt \qquad \text{(Eq. 4)}$$

y K_{var} es la varianza anualizada de entrega.

Tanto los *swaps* de varianza como los de volatilidad son productos negociados OTC por lo tanto la formulación exacta en el cálculo tanto de volatilidad como de varianza puede variar de una contrapartida a otra; de hecho en los contratos que aparecen en este artículo, uno simplifica la expresión considerando la media cero y el otro, no.

Aplicaciones de los *swaps* de varianza

La aplicación más directa de los *variance swaps* es apostar a la volatilidad realizada *vs* la implícita. Una apuesta tradicional es recibir la diferencia entre la volatilidad implícita (que suele estar más alta) y la realizada. No obstante, a pesar de que la información anterior es cierta en la mayoría de sesiones, los saltos (cambios abruptos de los precios) pueden cambiar la situación. Este hecho se puede explicar porque los *market makers* (creadores de mercado) de opciones tienen una posición natural de venta de opciones.

Además, el uso de los variance *swaps* nos permite hacer *trading* de volatilidad *forward*, que se implementa con la compra de un *variance swap* a un plazo y la venta del mismo *swap* a un plazo distinto. Esta posición da lugar a una volatilidad *forward* (ya que la varianza es aditiva y por lo tanto no lo podríamos hacer con un *swap* de volatilidad). La utilización de esta combinación permite cubrir el riesgo de volatilidad en opciones *forward start*.

También permite tomar decisiones de *spread*; es decir, apostar a que la volatilidad de un producto será inferior/superior a otra. Por ejemplo, combinando dos *swaps* podríamos cobrar la volatilidad del Ibex 35 y pagar la del Euro-Stoxx 50.

Ejemplos de mercado de *swaps* de volatilidad y de varianza

En los apartados anteriores nos hemos referido al nominal de ambos productos como a N, pero en el mercado, en el contexto de los *variance/volatility swaps* se habla de "vega" para referirse al *payoff* generado por un cambio del 1% en volatilidad realizada. Por lo tanto en el caso del *swap* de volatilidad si queremos una exposición de 100.000 euros de vega el multiplicador (es decir la N) será de 100.000/0,01.

En el caso del *variance swap* que tenga por raíz cuadrada del *strike* σ_K, una diferencia de un 1% en volatilidad se traduce en *payoff* como $((\sigma_K + 0{,}01)^2 - \sigma_K)^2$ y desarrollando se obtiene $2 \cdot \sigma_K \cdot 0{,}01 + 0{,}01^2$, y por convención de mercado usaremos como multiplicador $1/(2 \cdot \sigma_K \cdot 0{,}01)$. Siguiendo, pues, en el ejemplo de querer tener una exposición de 100.000 euros con un *strike* del 9% (que equivale en términos de volatilidad a un 30%) la N es 100.000/(2 · 30% · 0,01) = 16.666.666 euros o bien 1.666 euros si expresamos la varianza en puntos básicos.

En los cuadros 1 y 2 se puede ver los *term sheets* correspondientes a una operación de variance *swap* y un *volatility swap*.

Si consideramos un *swap* de varianza y de volatilidad con la misma vega (10.000 euros) se puede ver (gráfico 1) como el *payoff* correspondiente al *swap* de volatilidad es lineal mientras que el de varianza no lo es.

Cuadro 1
Euro-Stoxx 50
Variance Swap

Indicative Terms & Conditions

Instrument:	*Swap*
Trade Date:	*18-dic-09*
Maturity Date:	*18-jun-10*
Buyer:	*X Bank*
Seller:	*Counterparty*
Denominated Currency:	*EURO ("EUR")*
Variance Notional:	***EUR 1666.67***
	Derived as: EUR 100,000 / (2 Strike)
Underlying:	*DJ Euro-Stoxx 50 Index*
	Reuters: ^STOXX50E
Strike:	***30***

Final Equity Payment:	*On Maturity Date + 2 business days, the Final Equity Payment will be calculated in accordance with the following formula:*

Final Equity payment = Variance Notional · (Final Realized Volatility^2 – – Strike^2)

If the Final Equity Payment is positive the Seller will pay the Buyer the Final Equity Payment.
If the Final Equity Payment is negative the Buyer will pay the Seller the Final Equity Payment.
where

Final Price =

$$\sqrt{\frac{252 \times \sum_{i=0}^{i=N-1}\left[\ln\left(\frac{P_{i+1}}{P_i}\right)\right]^2}{N}} \times 100$$

N = Total number of returned observations between Trade date and Maturity Date
P_i = Official Closing of the underlying , i Exchange business days following Trade date.
P_0 = Official Closing of the underlying on Trade Date.

Calculation Agent:	*X Bank*
Documentation:	*ISDA*

Cuadro 2
S&P 500 *Volatility Swap*

Indicative Terms & Conditions

Fixed Rate Payer:	*XYZ Bank, London*
Floating Rate Payer:	*[TBA]*
Notional:	*[100,000] USD per volatility percentage point*
Trade Date:	*Oct 23, 2009*
Start Date:	*Oct 23, 2009*
Expiry Date:	*March 19, 2010*
Fixed Rate:	*[35%]*
Floating Rate:	*The Realized Daily Volatility of the Underlying, beginning from the Start date and ending on the Expiry Date.*
Underlying:	*S&P 500*
Cash Settlement:	*If the Fixed Rate is greater than the Floating Rate, the Fixed Rate Payer will pay the difference between the Fixed Rate and the Floating Rate (times the Notional) to the Floating Rate Payer.*
	If the Floating Rate is greater than the Fixed Rate, the Floating Rate Payer will pay the difference between the Floating Rate and the Fixed Rate (times the Notional) to the Fixed Rate Payer.
Realized Daily Volatility:	*The realized volatility is computed as follows:*

$$\sqrt{250\,\frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2}{(n-1)}}$$

Where:
u_i is the daily log return of the S&P 500 index for day i and is equal to the logarithm of the ratio of two consecutive business day fixings:

$$u_i = \ln\frac{S_i}{S_{i-1}}$$

S_i being the fixing for day n+1 is the number of fixings
u is the average of the

$$\overline{u} = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n}$$

Important: Annualized volatility is based on a 250-day count basis

Swaps de varianza y gestión delta de una opción *vanilla*

Volviendo a la gestión en el mundo BS, a parte de leas hipótesis propias del modelo, impondremos también tipos libre de riesgo y dividendos igual a cero. Esta hipótesis es en este caso muy poco restrictiva ya que consideraremos periodos muy cortos (variaciones a día) y tipos relativamente bajos.

Consideremos ahora una cartera con una opción. Si añadimos su cobertura delta obtenemos la siguiente expresión por las pérdidas y ganancias diarias (*profit and loss*, *P&L*):

$$P\ \&\ L = P\ \&\ L\ \text{gamma} + P\ \&\ L\ \text{vega} + P\ \&\ L\ \text{theta} + \varepsilon \qquad \text{(Eq. 5)}$$

donde la gamma es la segunda derivada del precio respeto al subyacente, la vega es la derivada respeto a la volatilidad, la theta es la variación debida al paso del tiempo y ε representa las sensibilidades de orden superior, reescribiendo la ecuación 5 tenemos:

$$P\ \&\ L = \frac{1}{2}\,\Gamma\,(\Delta S)^2 + \theta(\Delta t) + \upsilon\,(\Delta\sigma) + \ldots \qquad \text{(Eq. 6)}$$

Si obviamos los términos de orden superior y consideramos que la volatilidad implícita es constante tenemos:

$$P\ \&\ L = \frac{1}{2}\,\Gamma\,(\Delta S)^2 + \theta(\Delta t) \qquad \text{(Eq. 7)}$$

Utilizando la equivalencia $\theta \approx -\frac{1}{2}\Gamma S^2 \sigma^2$ (usaremos este resultado también en el apartado theta *vs* gamma) en la ecuación tenemos:

$$P\ \&\ L = \frac{1}{2}\,\Gamma\,S^2\left[\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 - \sigma^2\Delta t\right] \qquad \text{(Eq. 8)}$$

El término $\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2$ se puede considerar como la varianza diaria realizada y el término $\sigma^2\Delta t$ corresponde al cuadrado de la volatilidad implícita que se podría llamar como varianza implícita.

Es importante destacar que la gestión activa diaria de un libro de opciones *vanilla*, de forma muy simplificada, consiste en el control del término $\left[\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 - \sigma^2\Delta t\right]$. Dicho término se verá más o menos amplificado por la gamma de cada momento.

Sumando el *P&L* de toda la vida del producto obtenemos:

$$P\ \&\ L\_total = \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{n}\gamma_t\left[r_t^2 - \sigma^2\Delta t\right] \qquad \text{(Eq. 9)}$$

donde t denota la dependencia temporal (sumamos desde la contratación de la opción hasta el vencimiento), r_t es el rendimiento diario del activo en tiempo t, γ_t es la gamma de la opción multiplicada por el cuadrado del precio del activo en tiempo t, este parámetro es conocido como *dollar gamma*. Se puede notar que la ecuación 9 tiene un importante carácter *path-dependent*, ya que la γ_t depende mucho del nivel del activo.

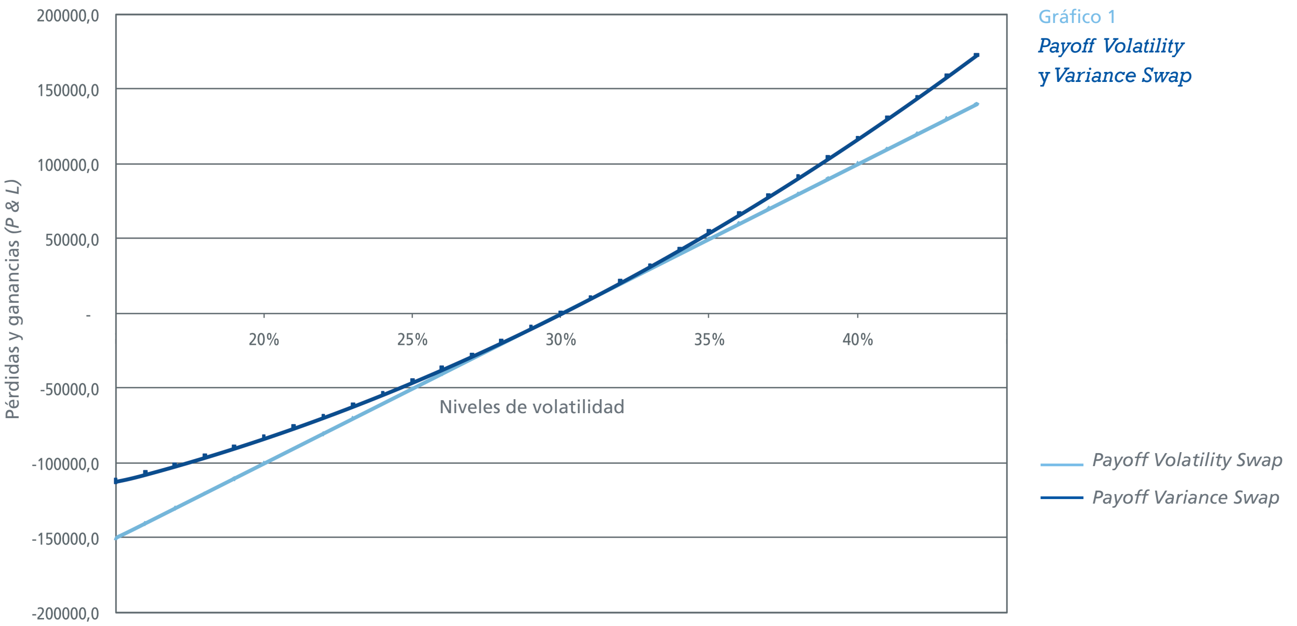

Gráfico 1
Payoff Volatility y *Variance Swap*

Por otro lado tenemos que la ecuación 9 corresponde al resultado de la gestión de una opción más su cobertura delta. Esta expresión responde a la pregunta que nos hacíamos en el apartado anterior cuando planteábamos cuál sería el resultado por movimiento de volatilidad cuando sólo gestionábamos una cartera con delta más gamma, pero al mismo tiempo tiene una expresión muy parecida al *payoff* de un *swap* de varianza. Recordemos que su *payoff* es la suma del cuadrado de los retornos menos una constante. La diferencia está en que en el caso del *variance swap* cada dato tiene el mismo peso dentro del sumatorio y en el caso de la ecuación 9, los pesos dependen de la gamma de la opción a través del tiempo. Este efecto es perfectamente conocido por los *traders* (el resultado de la cobertura de una opción depende altamente de controlar las opciones que tienen una *dollar gamma* relevante).

Cobertura estática de un *variance swap*

En el apartado anterior hemos visto como la gestión de una opción *vanilla* nos genera a vencimiento un resultado *(P&L)* "similar" al *payoff* de un *swap* de varianza. Lo que se pretende ahora es aprovechar esta similitud para intentar obtener una cartera de opciones que tenga en todo momento una dollar gamma constante, donde se evita la dependencia temporal y se obtiene al mismo tiempo el precio del *variance swap* y la gestión perfecta: una cartera que replique totalmente el *payoff*.

Una forma intuitiva de aproximarse a lo que podría ser una solución es analizar la *dollar gamma* de opciones con distintos *strikes* (gráfico 2).

Podemos observar que los *strikes* inferiores tienen una *dollar gamma* menor en relación a los *strikes* superiores, por lo tanto será necesario sobreponderar los *strikes* inferiores. Una primera idea es intentar que cada opción tenga el mismo máximo de *dollar gamma* (considerando que el máximo se alcanza cerca del *strike*). Veamos a continuación cuál es la *dollar gamma* que tiene una cartera en que el peso de cada opción es $w(k) = \frac{\alpha}{k}$, donde α es una constante y k es el *strike*. Observamos el resultado en el gráfico 3.

La gráfica obtenida dista aún de ser constante, pero vemos la relación aparentemente lineal que parece tener la *dollar gamma* con k, se puede considerar la solución como pesos $w(k) = \frac{\alpha}{k^2}$, así obtenemos el gráfico 4.

Observamos que se alcanza una región donde la *dollar gamma* es constante. Para ampliar la región constante hay que ampliar el rango de los *strikes*, en el caso límite, con opciones con *strikes* comprendidos entre 0 y ∞. Vemos que en la realidad estos pesos nos aportan una cobertura estática muy interesante y que el rango de validez de la cobertura de la cartera réplica es bastante amplio, pensemos que normalmente en el mercado de opciones de renta variable los *strikes* más líquidos suelen no distar más de un 25 - 30% del punto ATM, y esta región es la que básicamente cubre la cartera considerada.

La paridad *put call* nos dice que la gamma de una *call* y una *put* de idénticas características es la misma, formalmente:

$$Call - Put = forward \qquad \text{(Eq. 10)}$$

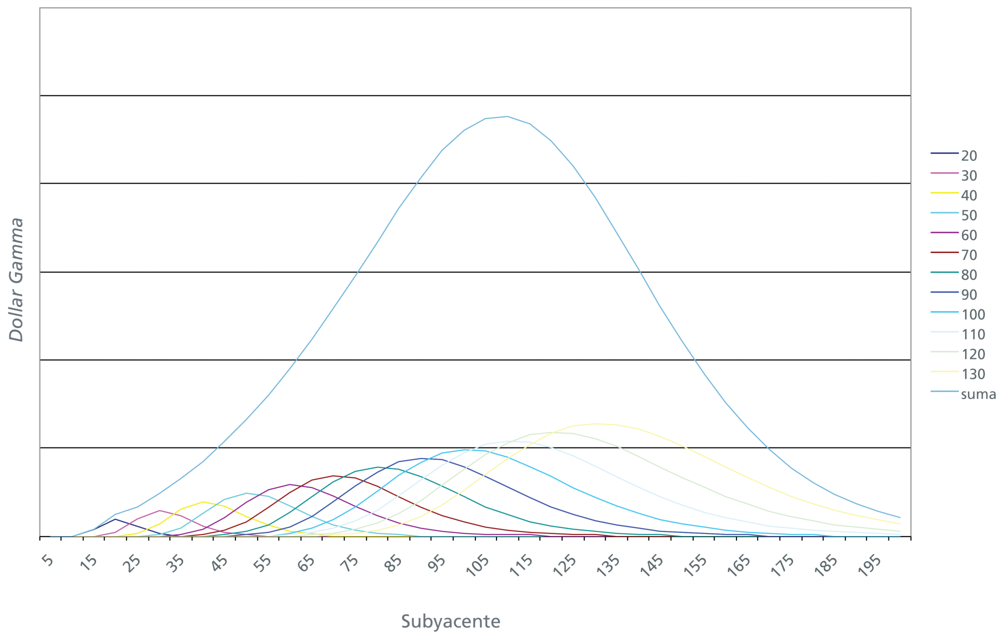

Gráfico 2
Dollar Gamma

Derivando:

$$\frac{\partial\, Call}{\partial\, S} - \frac{\partial\, Put}{\partial\, S} = 1 \qquad \text{(Eq. 11)}$$

$$\frac{\partial^2\, Call}{\partial^2\, S} - \frac{\partial^2\, Put}{\partial^2\, S} = 0 \qquad \text{(Eq. 12)}$$

Si consideramos la cartera (que denotaremos como Π) definida con los pesos del gráfico 4 y utilizamos la gestión delta obtendremos a vencimiento:

$$P\&L\_total = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\alpha\left[r_t^2 - \sigma^2{}_{implicita}(\Pi)\Delta t\right] \qquad \text{(Eq. 13)}$$

Que corresponde a la varianza utilizada menos la varianza implícita de la cartera que juega el papel del *strike*; es decir, el *payoff* de un variance *swap* multiplicado por una constante.

Por tanto la ecuación del precio de un *swap* de varianza de forma teórica y suponiendo que existen *strikes* de opciones *vanilla* desde cero hasta infinito, es:

$$VarSwap = \frac{2}{T}\left[\int_0^{S_*}\frac{1}{K^2}Put(k)dk + \int_{S_*}^{\infty}\frac{1}{K^2}Call(k)dk + \right] - \frac{strike^2}{(1+r)^T} \qquad \text{(Eq. 14)}$$

A pesar que a primera vista la expresión anterior puede parecer complicada, realmente es "sólo" la suma de pri-

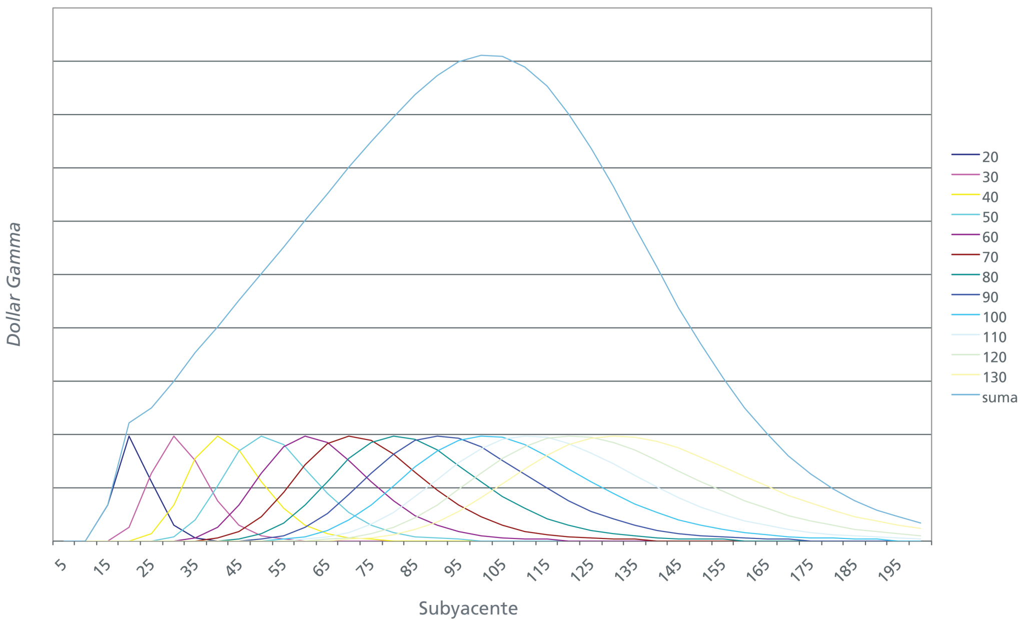

Gráfico 3
Dollar Gamma $w(k) = \dfrac{\alpha}{k}$

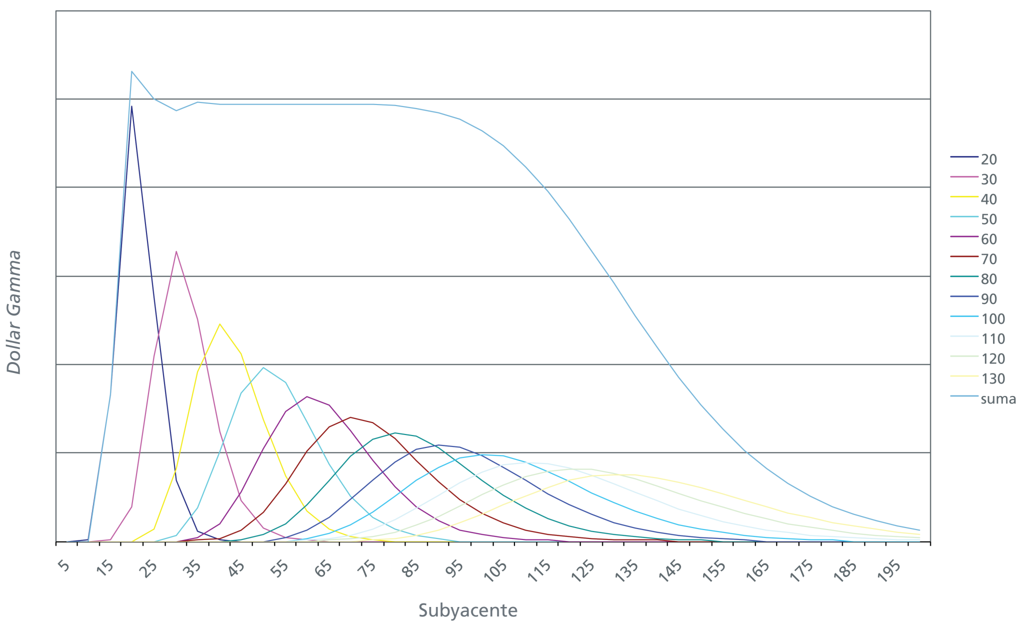

Gráfico 4
Dollar Gamma $w(k) = \dfrac{\alpha}{k^2}$

mas de *calls* y *puts* con una cierta ponderación. A nivel real substituiremos las integrales por la suma de opciones con *strikes* separados por un Δk (podemos usar por ejemplo 5%) y en caso de hacer la cobertura aún se considerarían menos opciones (un Δk superior). En la expresión anterior S_* representa el nivel ATM *forward*.

Para poder calcular las primas de las opciones lo que necesitaremos es tener una superficie de volatilidad bien calibrada, ya que normalmente sólo tendremos precios de mercado para *strikes* próximos al nivel actual del activo (ATM *strikes*). Con esta superficie calcularemos las primas de *calls* y *puts*.

Cotizaciones de *swaps* de varianza

Los *swaps* de varianza cotizan de forma parecida a como cotiza un *swap* de tipos de interés; es decir, cotiza el *strike*. El nivel que se observa en el gráfico posterior son los K_{var} que se han utilizado en la definición (gráfico 5).

Como se puede ver en el gráfico 5, estos *swaps* suelen cotizar con una apertura entre 0,5% y 2% y se negocian mayoritariamente sobre índices (por ejemplo Euro-Stoxx 50), aunque también se pueden negociar directamente sobre valores.

Theta *vs* gamma

Si pensamos que tenemos un libro de opciones *vanilla*, la theta y la gamma siempre tendrán signo contrario; es decir, libros con theta positiva tendrán gamma negativa y viceversa. Optimizar la gestión de un libro, por ejemplo con theta negativa, implica ser capaz de capturar [(4)] el máximo de gamma posible. Básicamente existen tres grandes criterios para definir la gestión gamma:

1. Escoger un horizonte temporal, que define la cobertura cada Δt. Por ejemplo cubrir en la apertura y el cierre de la sesión o bien cada 2 horas (en general cada n horas). Este criterio simplifica la cobertura pero no nos garantiza que capturemos gamma suficiente para contrarrestar la theta que seguro perderemos.

2. Alternativamente podríamos definir que reharemos nuestra cobertura no considerando un Δt sino considerando un ΔS. Por ejemplo operar sólo cuando el subyacente se haya movido un x% (1%,2%,...)

Las dos formas que hemos comentado no tienen en cuenta ningún parámetro de la opción, ni cuál es la theta ni la gamma en cada momento, y por tanto no garantizan ninguna relación entre dichas sensibilidades.

3. Usar la gamma de la opción como base del criterio. En este criterio se pueden encontrar distintas variantes; una, es considerar la ratio theta/gamma (o gamma/theta). La idea es recubrir la cartera cuando el resultado del beneficio/pérdida por gamma es x veces la theta; por ejemplo si se considera 1/3, significa que se cubre la cartera siempre que el resultado por gamma sea 1/3 de la theta. Ello implica que si al final del día se ha rehecho la cobertura más de 3 veces, el resultado por gamma será superior a la theta que se ha invertido. Este número arbitrario lo fijará el operador y dependerá básicamente de cómo esté el mercado en cada momento, así como de qué subyacente se trate.

Más formalmente lo que se está realizando, cuando se basa la gestión en esta ratio, es utilizar la equivalencia $\theta \approx -\frac{1}{2}\Gamma\,(\Delta S)^2$, por tanto intentar capturar como mínimo

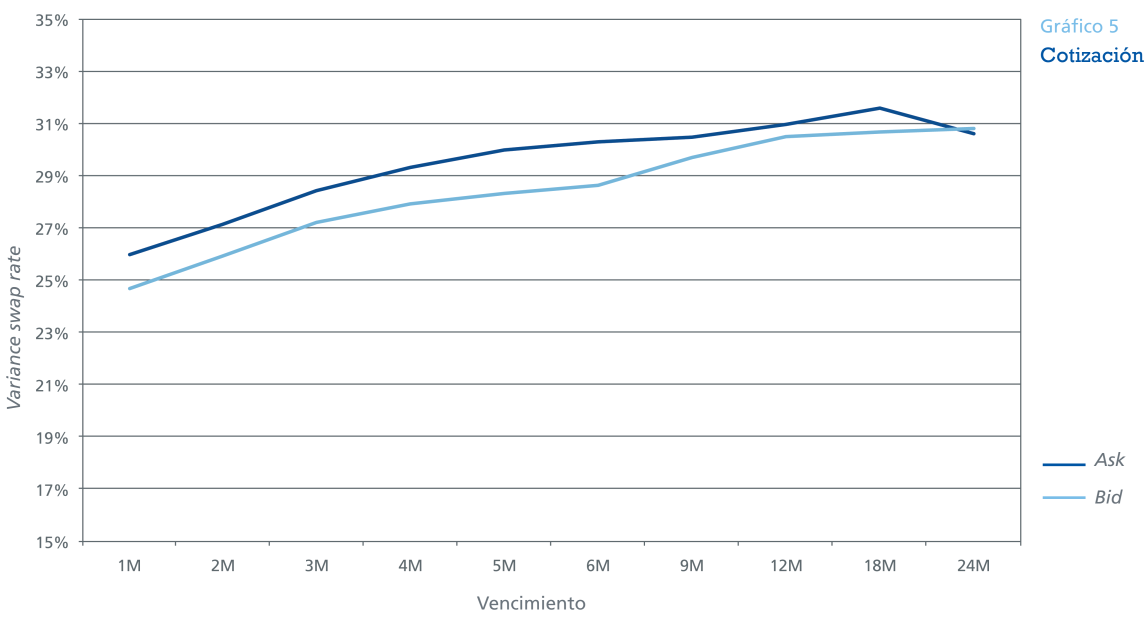

Gráfico 5
Cotización *Variance Swap*

por gamma lo que por theta se ha perdido.

Así pues, en un libro gestionado con este criterio, la gestión equivale a garantizar el *payoff* de una suma de *variance swaps* (formados por la suma de cada una de las opciones). De esta forma podríamos entender también los *swaps* de varianza como un instrumento alternativo a la gestión dinámica de un libro de opciones.

Conclusión

Tanto los *swaps* de varianza como los *swap* de volatilidad representan una nueva generación de derivados. Analizando las sensibilidades de los derivados estándar (mundo Black–Scholes) obtenemos expresiones que se consideran productos de una y otra generación; en concreto podemos escribir la réplica estática de un *swap* de varianza en base a opciones simples. Este resultado conlleva, implícitamente, muchos otros, podemos calcular primas y sensibilidades de los nuevos productos en base a las expresiones que ya disponíamos sobre las opciones sencillas. También nos ayuda a entender el uso que tiene como herramienta de gestión en carteras de opciones simples, así como nos facilita la exposición directa a la volatilidad y la posibilidad de exposición al *spread* de volatilidad implícita contra realizada.

Pies de página

(1) En la práctica, a día de hoy la volatilidad siempre se entiende como $\sigma(t,k)$; es decir, que la volatilidad no es única y constante para un activo, sino que depende del tiempo *(t)* y del *strike (k)*. Definiendo $\sigma(t,k)$ la superficie de volatilidad del activo.

(2) En el apartado *swaps* de varianza y gestión delta de una opción *vanilla* veremos analíticamente el resultado de considerar sólo la delta y la gamma.

(3) En un mundo ideal (Black–Scholes) no habría distinción entre las tres volatilidades.

(4) La expresión capturar gamma equivale a ver cuál es la volatilidad que recogemos en nuestra cobertura, que en el apartado anterior hemos definido como σ_g.

Bibliografía

Bossu, Sebastien; Strasser, Eva; Guichard, Regis; *"Just what you need to know about variance swaps"*; JPMorgan Equity Derivatives, Report; 2005.

Bossu, Sebastien; *"Option trading and variance swaps"*; Equity Derivatives Workshop for The University of Chicago; 2005.

Carr, Peter; Lee, Roger; *"Robust Replication of Volatility Derivatives"*; http://www.math.nyu.edu/research/carrp/research.html; 2003.

Demeterfi, Kresimir; Derman, Emanuel; Kamal, Michael; Zou, Joseph; *"A Guide to Volatility and Variance swaps";* The Journal of Derivatives; 6; 1999.

Demeterfi, Kresimir; Derman, Emanuel; Kamal, Michael; Zou, Joseph; *"More Than You Ever Wanted To Know About Volatility Swap s"*; Goldman Sachs: Quantitative Strategies Research Notes; 1999.

Gairat, Alexander; *"Variance swaps"*; IVolatility.

http://www.ivolatility.com/doc/varianceswaps.pdf.

Hull, John; Options, Futures, and Other Derivatives; Technical Note No. 22. Séptima edición.

Javaheri, Alireza; Wilmott, Paul; Haug, Espen G.*"GARCH and volatility swaps"*. http://www.wilmott.com.

Petkovic, Danijela; *Pricing variance swaps by using two methods: replication strategy and a stochastic volatility model"*. Halmstad University; 2008.

Swishchuk, Anatoliy; *Modeling of Variance and Volatility Swaps for Financial Markets with Stochastic Volatilities.* http://www.wilmott.com.

Sobre el autor

Jordi Planagumà i Vallsquer, licenciado por la UPC y máster en Finanzas cuantitativas por AFI. Trader de derivados de renta variable en "la Caixa", profesor del post-grado "Herramientas cuantitativas para los mercados financieros" (FME-UPC) y profesor colaborador del IEF.