Document de Treball

Número 4
Octubre 2010

www.iefweb.org/odf

# Introducció als derivats sobre volatilitat; definició, valoració i cobertura estàtica.

Jordi Planagumà i Vallsquer

Aquest article és una introducció al món dels derivats sobre volatilitat. Es presenta la definició dels *swaps* de volatilitat *(volatility swaps)* i de variància *(variance swaps)*. Per als swaps de variància es mostra la manera de calcular el preu del producte i com construir-hi la cobertura estàtica a través d'una cartera rèplica, en aquest punt es veurà la relació que hi ha entre la gestió tradicional de carteres d'opcions simples *(vanilla)* i el món dels swaps de variància.

## Introducció

És ben sabut el salt que va suposar a la dècada dels setanta l'aportació de Black–Scholes (1973) al món de l'avaluació de derivats. Tot i reconeixent la vigència de l'ús de la seva fórmula, podem destacar que un dels seus punts controvertits és l'assumpció de volatilitat constant, que ha demostrat ser del tot falsa, però que les millores introduïdes en el model (per exemple la construcció de superfícies de volatilitat) n'han permès l'aplicació al llarg de més de tres dècades. La part positiva d'aquesta hipòtesi és que facilita enormement el càlcul i permet aconseguir una fórmula bastant intuïtiva i de ràpida aplicació. El vessant negatiu és la rigidesa que confereix al model, ja que la realitat en el món dels derivats demostra que les distribucions de probabilitats dels actius solen tenir diverses patologies: la falta de simetria en les distribucions, salts, cues pesades i la dependència de la volatilitat, tant en el temps com en el pla de l'actiu (1).

## Objectiu

En aquest article es pretén desenvolupar els derivats que podem anomenar de segona generació, concretament el cas dels derivats sobre volatilitat. Els definirem, parlarem del seu preu i quina és la seva cobertura, així com també s'analitzarà la relació entre els derivats sobre la volatilitat i els derivats estàndards *(vanilla)*. Tot això des de la perspectiva del "món" Black–Scholes i usant la formulació tradicional de valoració de derivats.

## La vega dins el món Black–Scholes

Usar el model de Black–Scholes (BS) implicarà considerar per a la gestió totes les derivades parcials (sensibilitats) de la fórmula de BS en els diversos paràmetres de l'opció. La delta i la gamma, primera i segona derivada de la prima respecte al subjacent, la theta, sensibilitat al temps, i la vega, sensibilitat a la volatilitat.

Tot i la hipòtesi (poc realista) de considerar que és possible la cobertura contínua i sense costos de transacció, la gestió per gregues, tant la de delta com la de gamma, resulta des d'un punt de vista pràctic bastant factible.

Contràriament, la gestió de la vega ja presenta des d'un primer moment un problema de definició. Per aplicar la gestió delta–gamma només cal comprar/vendre la quantitat de subjacent determinat per les expressions derivades de la fórmula de BS; no és així amb la vega, atès que no és possible comprar o vendre volatilitat directament com si d'un actiu es tractés. Així

Observatori de Divulgació Financera

doncs, quines alternatives hi ha per a la gestió de la vega?

En primera instància podem assumir totalment la hipòtesi de volatilitat constant i per tant considerar que l'opció té risc lligat al moviment del subjacent però no a la volatilitat [(2)]. Una altra via és usar altres opcions per tal d'aconseguir una cartera que tingui una vega neutra; és a dir, posicions en altres opcions que tinguin una vega equivalent però en sentit contrari. Aquest camí seria correcte si la hipòtesi de volatilitat constant (en temps, nivell de subjacent i *strike*) fos certa. Per tant el que acabem tenint és una cartera de $n$ opcions i $n$ subjacents amb una vega igual a la suma de vegues de les opcions que la conformen.

En resum, es té un producte amb sensibilitat a un paràmetre que no és directament observable, que no es pot comprar/vendre directament, que és difícil d'estimar estadísticament i que modelitzar-lo és molt complex.

## Tipologies de volatilitat

Veient que serà difícil la gestió de la vega directament, es pot (donant per bones les hipòtesis de BS) gestionar la cartera d'opcions seguint estrictament la delta i la gamma en cada moment, esperant que aquesta cobertura proporcioni un resultat independent de la volatilitat. Aquesta gestió condueix a considerar tres volatilitats diferents.

En primer lloc, la que s'aplica a la formulació de BS i que dóna uns nivells de delta i gamma que s'usaran per gestionar la posició, en direm $\sigma_{bs}$; en segon lloc, la volatilitat pròpia de l'actiu $\sigma_R$, que formalment podem definir com la desviació estàndard anualitzada dels rendiments del subjacent en un cert període de temps. Aquesta última, la podem anomenar volatilitat realitzada. I per últim la volatilitat efectivament capturada per la nostra gestió $\sigma_g$ [(3)], es calcula de manera anàloga a la realitzada però els preus usats per calcular la desviació són aquells als quals el gestor ha operat.

Per tant, veiem que les opcions estan condicionades per la volatilitat, el seu resultat en depèn enormement, però no donen de manera senzilla l'exposició pura a aquest paràmetre. Així doncs, el resultat per vega serà una expressió que dependrà de la diferència d'aquestes volatilitats. Com serà aquesta expressió? I com es pot aconseguir tenir exposició directa i única a la volatilitat?

## Permuta financera *(swap)* de volatilitat

La resposta es troba en els derivats sobre la volatilitat. S'introduiran primer els *swaps* de volatilitat, que bàsicament són contractes forward sobre la volatilitat realitzada futura, els quals donen únicament exposició a la volatilitat.

Un *swap* de volatilitat *(volatility swap)* sobre un actiu és un contracte *forward* sobre la volatilitat anualitzada, que té per pagament *(payoff)*:

$$N \times \left(\sigma_R\left(S\right) - K_{vol}\right) \qquad \text{(Eq. 1)}$$

on $\sigma_R\,(S)$ és la volatilitat realitzada per l'actiu (anualitzada), formalment:

$$\sigma_R\left(S\right) = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t^2 \, dt} \qquad \text{(Eq. 2)}$$

on $\sigma_t$ és la volatilitat estocàstica de l'actiu, $K_{vol}$ és la volatilitat anualitzada d'entrega i $N$ és el nominal del contracte. Així, el que compra el *swap* de volatilitat rebrà $N$ euros per cada punt que la volatilitat de l'actiu $\sigma_R\,(S)$ superi la d'entrega ($K_{vol}$), respectivament pagarà $N$ euros per cada punt $K_{vol}$ que superi a $\sigma_R\,(S)$. Per tant s'està intercanviant ("swapejant") un nivell de volatilitat fix ($K_{vol}$) per un nivell de volatilitat futura $\sigma_R\,(S)$, semblantment al que es fa en un *swap* de tipus d'interès.

A la pràctica cal aclarir com es procedirà a calcular el terme $\sigma_R\,(S)$. En l'equació 2 es troba l'expressió contínua de la volatilitat que s'usarà per fer la modelització, però per calcular la liquidació s'usarà una versió discreta, en la qual cal especificar:

- La freqüència d'observació (el més habitual és considerar dades diàries i preus de tancament).
- El factor d'anualització (es pot considerar que un any correspon a 252 sessions, a 260 sessions, etc.).
- La mitjana, en el càlcul de la desviació estàndard es resta a cada dada la mitjana dels retorns. Se simplificarà el càlcul amb la hipòtesi de mitjana zero. Aquesta simplificació serà de gran utilitat per tal de trobar una cartera rèplica que permeti valorar el producte.

## *Swaps* de variància *(variance swaps)*

A part dels *swaps* de volatilitat, també es negocien els *swaps* de variància *(variance swaps)* que són un contracte *forward* sobre la variància anualitzada i que té per *payoff*:

$$N \times \left(\sigma_R^2\left(S\right) - K_{var}\right) \qquad \text{(Eq. 3)}$$

on $\sigma_R^2(S)$ és la variància realitzada per l'actiu (anualitzada), de forma contínua:

$$\sigma_R^2(S) = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t^2 \, dt \qquad \text{(Eq. 4)}$$

i $K_{var}$ és la variància anualitzada d'entrega.

Tant els *swaps* de variància com els de volatilitat són productes negociats OTC per tant la formulació exacta en el càlcul tant de volatilitat com de variància pot canviar d'una contrapartida a una altra; de fet en els contractes que apareixen en aquest article, un simplifica l'expressió considerant la mitjana zero i l'altre, no.

## Aplicacions dels *swaps* de variància

L'aplicació més directa dels *variance swaps* és apostar a la volatilitat realitzada *vs* la implícita. Una aposta tradicional és rebre la diferència entre la volatilitat implícita (que sol estar més alta) i la realitzada. No obstant, tot i que l'afirmació anterior és certa en la majoria de sessions, els salts (canvis abruptes dels preus) poden capgirar la situació. Aquest fet es pot explicar perquè els *market makers* (creadors de mercat) d'opcions tenen una posició natural de venda d'opcions.

A més, l'ús dels *variance swaps* ens permet fer *trading* de volatilitat *forward*, que s'implementa amb la compra d'un *variance swap* a un termini i la venda del mateix *swap* a un termini diferent. Aquesta posició dóna lloc a una volatilitat *forward* (ja que la variància és additiva i per tant no ho podríem fer amb un *swap* de volatilitat). L'ús d'aquesta combinació permet cobrir el risc de volatilitat en opcions *forward start*.

També permet prendre posicions d'*spread*, és a dir, apostar a que la volatilitat d'un producte serà inferior/superior a una altra. Per exemple, combinant dos *swaps* podríem cobrar la volatilitat de l'Ibex 35 i pagar la de l'Euro-Stoxx 50.

## Exemples de mercat de *swaps* de volatilitat i de variància

En els apartats anteriors ens hem referit al nominal d'ambdós productes com a $N$, però en el mercat, en el context dels *variance/volatility swaps* es parla de "vega" per referir-se al *payoff* generat per un canvi de l'1% en volatilitat realitzada. Per tant en el cas del *swap* de volatilitat si volem una exposició de 100.000 euros de vega el multiplicador (és a dir la $N$) serà de 100.000/0,01.

En el cas del *variance swap* que tingui per arrel quadrada de l'*strike* $\sigma_K$, una diferència d'un 1% en volatilitat es tradueix en *payoff* com $((\sigma_K + 0{,}01)^2 - \sigma_K)^2$ i desenvolupant s'obté $2 \cdot \sigma_K \cdot 0{,}01 + 0{,}01^2$, i per convenció de mercat usarem com a multiplicador $1/(2 \cdot \sigma_K \cdot 0{,}01)$. Seguint, doncs, en l'exemple de voler tenir una exposició de 100.000 euros amb un *strike* del 9% (que equival en termes de volatilitat a un 30%) la *N* és 100.000/(2 · 30% · 0,01) = 16.666.666 euros o bé 1.666 euros si expressem la variància en punts bàsics.

En els quadres 1 i 2 es pot veure els *term sheets* corresponents a una operació de *variance swap* i un *volatility swap*.

Si considerem un *swap* de variància i de volatilitat amb la mateixa vega (10.000 euros) es pot veure (gràfic 1) com el *payoff* corresponent al *swap* de volatilitat és lineal mentre que el de variància no ho és.



## *Swaps* de variància i gestió delta d'una opció *vanilla*

Tornant a la gestió dins el món BS, apart de les hipòtesis pròpies del model, imposarem també tipus lliure de risc i dividends igual a zero. Aquesta hipòtesi és en aquest cas molt poc restrictiva ja que considerarem períodes molt curts (variacions a dia) i tipus relativament baixos.

Considerem ara una cartera amb una opció. Si hi afegim

Quadre 1
Euro-Stoxx 50
*Variance Swap*

*Indicative Terms & Conditions*

| | |
|---|---|
| *Instrument:* | *Swap* |
| *Trade Date:* | *18-dic-09* |
| *Maturity Date:* | *18-jun-10* |
| *Buyer:* | *X Bank* |
| *Seller:* | *Counterparty* |
| *Denominated Currency:* | *EURO ("EUR")* |
| *Variance Notional:* | ***EUR 1666.67*** |
| | *Derived as: EUR 100,000 / ( 2  Strike )* |
| *Underlying:* | *DJ Euro-Stoxx 50 Index* |
| | *Reuters: ^STOXX50E* |
| ***Strike:*** | ***30*** |

| | |
|---|---|
| *Final Equity Payment:* | *On Maturity Date + 2 business days, the Final Equity Payment will be calculated in accordance with the following formula:* |

Final Equity payment = Variance Notional · (Final Realized Volatility$^2$ – – Strike$^2$)

*If the Final Equity Payment is positive the Seller will pay the Buyer the Final Equity Payment.*
*If the Final Equity Payment is negative the Buyer will pay the Seller the Final Equity Payment.*
*where*

***Final Price =***

$$\sqrt{\frac{252 \times \sum_{i=0}^{i=N-1}\left[\ln\left(\frac{P_{i+1}}{P_i}\right)\right]^2}{N}} \times 100$$

*N = Total number of returned observations between Trade date and Maturity Date*
*$P_i$ = Official Closing of the underlying , i  Exchange business days following Trade date.*
*$P_0$ = Official Closing of the underlying on Trade Date.*

| | |
|---|---|
| *Calculation Agent:* | *X  Bank* |
| *Documentation:* | *ISDA* |

---

*Indicative Terms & Conditions*

Quadre 2
S&P 500 *Volatility Swap*

| | |
|---|---|
| *Fixed Rate Payer:* | *XYZ Bank, London* |
| *Floating Rate Payer:* | *[TBA]* |
| *Notional:* | *[100,000] USD per volatility percentage point* |
| *Trade Date:* | *Oct 23, 2009* |
| *Start Date:* | *Oct 23, 2009* |
| *Expiry Date:* | *March 19, 2010* |
| *Fixed Rate:* | *[35%]* |
| *Floating Rate:* | *The Realized Daily Volatility of the Underlying, beginning from the Start date and ending on the Expiry Date.* |
| *Underlying:* | *S&P 500* |
| *Cash Settlement:* | *If the Fixed Rate is greater than the Floating Rate, the Fixed Rate Payer will pay the difference between the Fixed Rate and the Floating Rate (times the Notional) to the Floating Rate Payer. If the Floating Rate is greater than the Fixed Rate, the Floating Rate Payer will pay the difference between the Floating Rate and the Fixed Rate (times the Notional) to the Fixed Rate Payer.* |
| *Realized Daily Volatility:* | *The realized volatility is computed as follows:* |

$$\sqrt{250\,\frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}{(n-1)}}$$

*Where:*
*$u_i$ is the daily log return of the S&P 500 index  for day  i and is equal to the logarithm of the ratio of two consecutive business day fixings:*

$$u_i = \ln\frac{S_i}{S_{i-1}}$$

*$S_i$ being the fixing for day n+1 is the number of fixings*
*$u$  is the average of the*

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n}$$

*Important: Annualized volatility is based on a 250-day count basis* la seva cobertura delta obtenim l'expressió següent per les pèrdues i guanys diaris (*profit and loss*, *P&L*):

$$P\ \&\ L = P\ \&\ L\ \text{gamma} + P\ \&\ L\ \text{vega} + P\ \&\ L\ \text{theta} + \varepsilon \qquad \text{(Eq. 5)}$$

on la gamma és la segona derivada del preu respecte el subjacent, la vega és la derivada respecte la volatilitat, la theta és la variació deguda al pas del temps i $\varepsilon$ representa les sensibilitats d'ordre superior, reescrivint l'equació 5 tenim:

$$P\ \&\ L = \frac{1}{2}\Gamma\,(\Delta S)^2 + \theta(\Delta t) + \upsilon\,(\Delta\sigma) + \ldots \qquad \text{(Eq. 6)}$$

Si obviem els termes d'ordre superior i considerem que la volatilitat implícita és constant tenim:

$$P\ \&\ L = \frac{1}{2}\,\Gamma\,(\Delta S)^2 + \theta(\Delta t) \qquad \text{(Eq. 7)}$$

Usant l'equivalència $\theta \approx -\frac{1}{2}\Gamma S^2 \sigma^2$ (usarem aquest resultat també en l'apartat theta *vs* gamma) en l'equació tenim:

$$P\ \&\ L = \frac{1}{2}\,\Gamma\, S^2\left[\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 - \sigma^2 \Delta t\right] \qquad \text{(Eq. 8)}$$

El terme $\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2$ es pot considerar com la variància diària realitzada i el terme $\sigma^2 \Delta t$ correspon al quadrat de la volatilitat implícita diària, que es podria anomenar com variància implícita.

És important destacar que la gestió activa diària d'un llibre d'opcions *vanilla*, de manera molt simplificada, consisteix en el control del terme $\left[\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 - \sigma^2 \Delta t\right]$. Aquest terme es veurà més o menys amplificat per la gamma de cada moment.

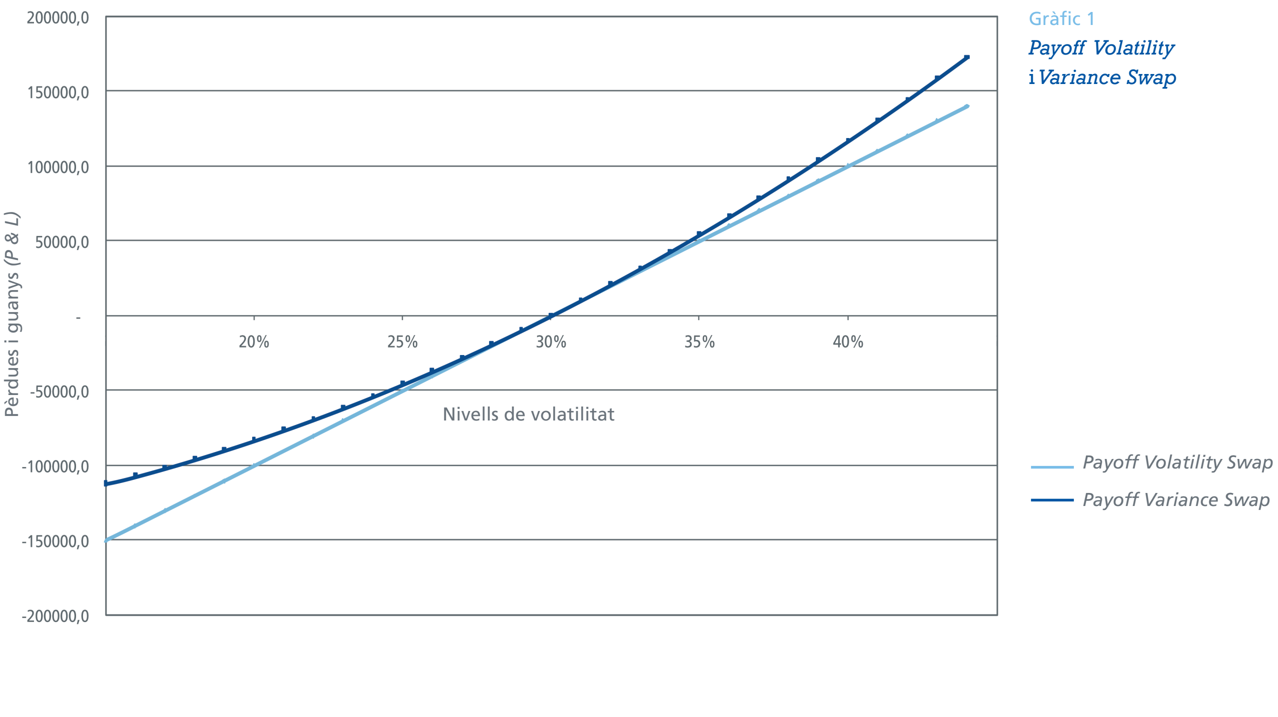
Sumant el *P&L* de tota la vida del producte obtenim:

$$P\ \&\ L\_total = \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{n}\gamma_t\left[r_t^2 - \sigma^2 \Delta t\right] \qquad \text{(Eq. 9)}$$

on $t$ denota la dependència temporal (sumem des de la contractació de l'opció fins al venciment), $r_t$ és el rendiment diari de l'actiu en temps $t$, $\gamma_t$ és la gamma de l'opció multiplicada pel quadrat del preu de l'actiu en temps $t$, aquest paràmetre és conegut com a *dollar gamma*. Es pot notar que l'equació 9 té un important caràcter *path-dependent,* ja que la $\gamma_t$ depèn molt del nivell de l'actiu.

D'una banda tenim que l'equació 9 correspon al resultat de la gestió d'una opció més la seva cobertura delta. Aquesta expressió respon a la pregunta que ens fèiem a l'apartat anterior quan plantejàvem quin seria el resultat per moviment de volatilitat quan només gestionàvem una cartera amb delta més gamma, però alhora té una expressió molt semblant al *payoff* d'un *swap* de variància. Recordem que el seu *payoff* és la suma del quadrat dels retorns






Gràfic 1
*Payoff Volatility i Variance Swap*

menys una constant. La diferència rau que en el cas del *variance swap* cada dada té el mateix pes dins el sumatori i en el cas de l'equació 9 els pesos depenen de la gamma de l'opció a través del temps. Aquest efecte és perfectament conegut pels *traders* (el resultat de la cobertura d'una opció depèn altament de controlar les opcions que tenen una *dollar gamma* rellevant).

## Cobertura estàtica d'un *variance swap*

En l'apartat anterior hem vist com la gestió d'una opció vanilla ens genera a venciment un resultat *(P&L)* "semblant" al *payoff* d'un *swap* de variància. El que es pretén ara és aprofitar aquesta similitud per intentar obtenir una cartera d'opcions que tingui en tot moment una dollar gamma constant, on s'evita la dependència temporal i s'obté alhora el preu del *variance swap* i la gestió perfecta: una cartera que repliqui totalment el *payoff*.

Una manera intuïtiva d'aproximar-se al que podria ser una solució és analitzar la dollar gamma d'opcions amb diferents *strikes* (gràfic 2).

Podem observar que els *strikes* inferiors tenen una *dollar gamma* menor en relació als *strikes* superiors, per tant caldrà sobreponderar els *strikes* inferiors. Una primera idea és intentar que cada opció tingui el mateix màxim de *dollar gamma* (considerant que el màxim s'assoleix a prop de l'*strike*). Veiem a continuació quina *dollar gamma* té una cartera en què el pes de cada opció és $w(k) = \dfrac{\alpha}{k}$, on $\alpha$ és una constant i k és l'*strike*. Observem el resultat en el gràfic 3.

El gràfic obtinguda dista encara de ser constant, però veiem la relació aparentment lineal que sembla tenir la *dollar gamma* amb $k$, es pot considerar la solució com a pesos $w(k) = \dfrac{\alpha}{k^2}$, així obtenim el gràfic 4.

Veiem que s'aconsegueix una regió on la *dollar gamma* és constant. Per ampliar la regió constant cal ampliar el rang dels *strikes,* en el cas límit, amb opcions amb *strikes* compresos entre 0 i ∞. Notem que en la realitat aquests pesos ens aporten una cobertura estàtica molt interessant i que el rang de validesa de la cobertura de la cartera rèplica és força ampli, pensem que normalment en el mercat d'opcions de renda variable els *strikes* més líquids solen no distar més d'un 25-30% del punt ATM, i aquesta regió és la que bàsicament cobreix la cartera considerada.

La paritat *put call* ens diu que la gamma d'una *call* i una *put* d'idèntiques característiques és la mateixa, formalment:

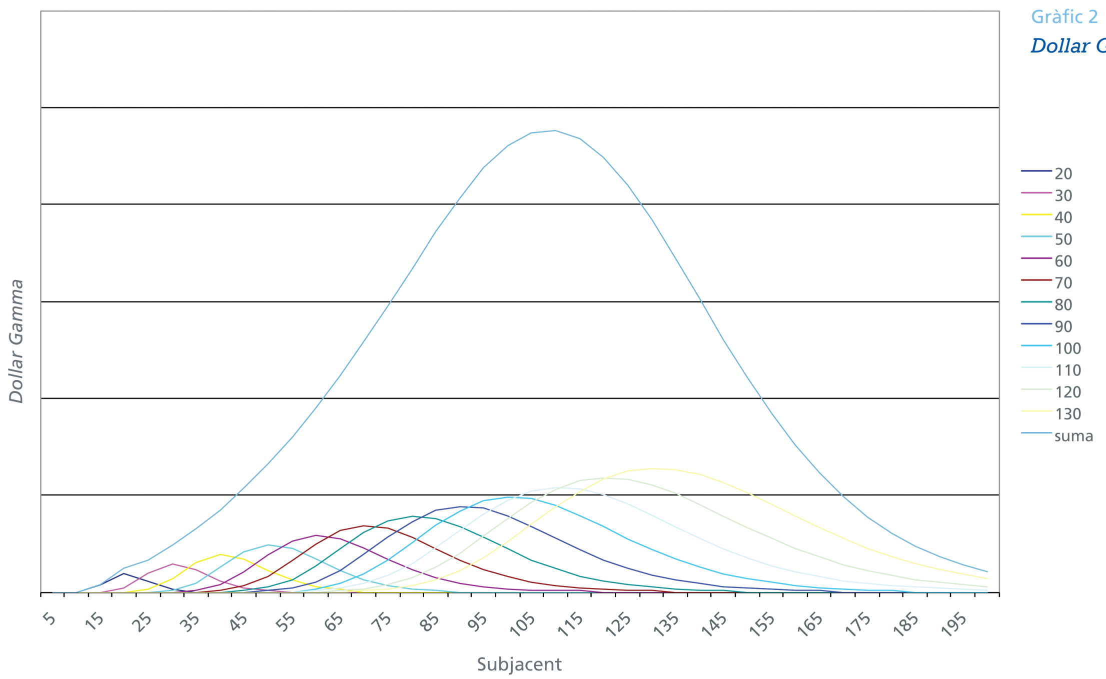
$$Call - Put = forward \qquad \text{(Eq. 10)}$$

Derivant:

$$\frac{\partial\, Call}{\partial\, S} - \frac{\partial\, Put}{\partial\, S} = 1 \qquad \text{(Eq. 11)}$$

$$\frac{\partial^2\, Call}{\partial^2\, S} - \frac{\partial^2\, Put}{\partial^2\, S} = 0 \qquad \text{(Eq. 12)}$$






Gràfic 2
*Dollar Gamma*

Si considerem la cartera (que denotarem com $\Pi$) definida amb els pesos del gràfic 4 i usem la gestió delta obtindrem a venciment:

$$P\,\&\,L\_total = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\alpha\left[r_t^2 - \sigma^2{}_{implicita}(\Pi)\Delta t\right]$$

(Eq. 13)

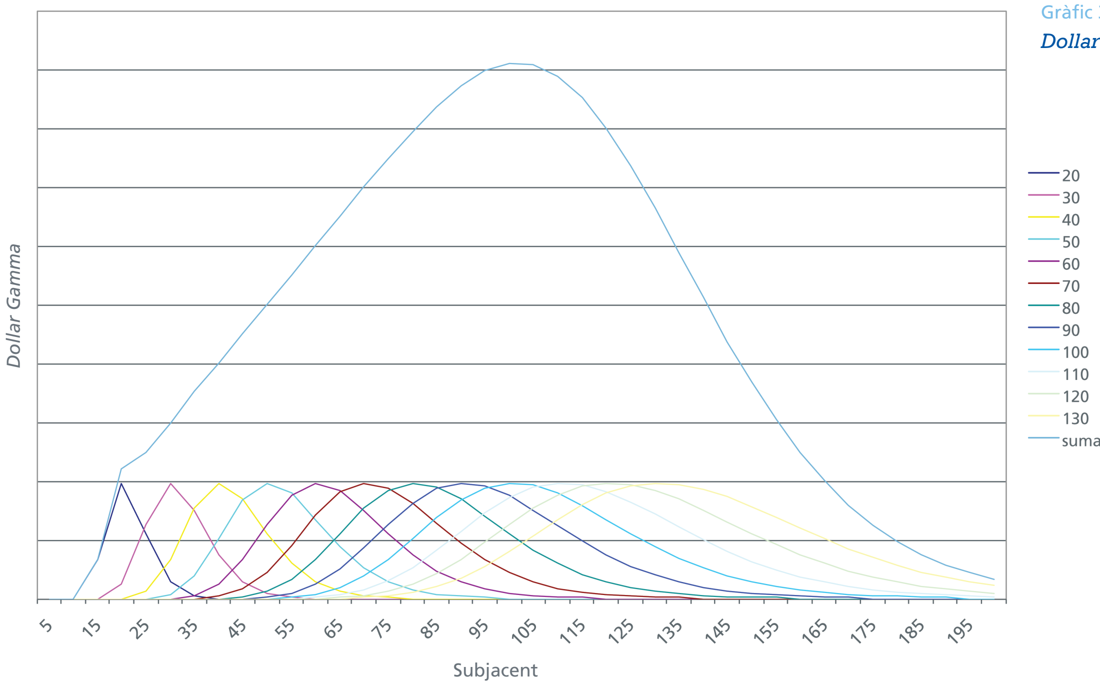
Que correspon a la variància realitzada menys la variància implícita de la cartera que fa el paper de l'*strike*, és a dir, és el *payoff* d'un *variance swap* multiplicat per una constant.

Per tant l'equació del preu d'un *swap* de variància de manera teòrica i suposant que existeixen *strikes* d'opcions *vanilla* des de zero fins a infinit, és:

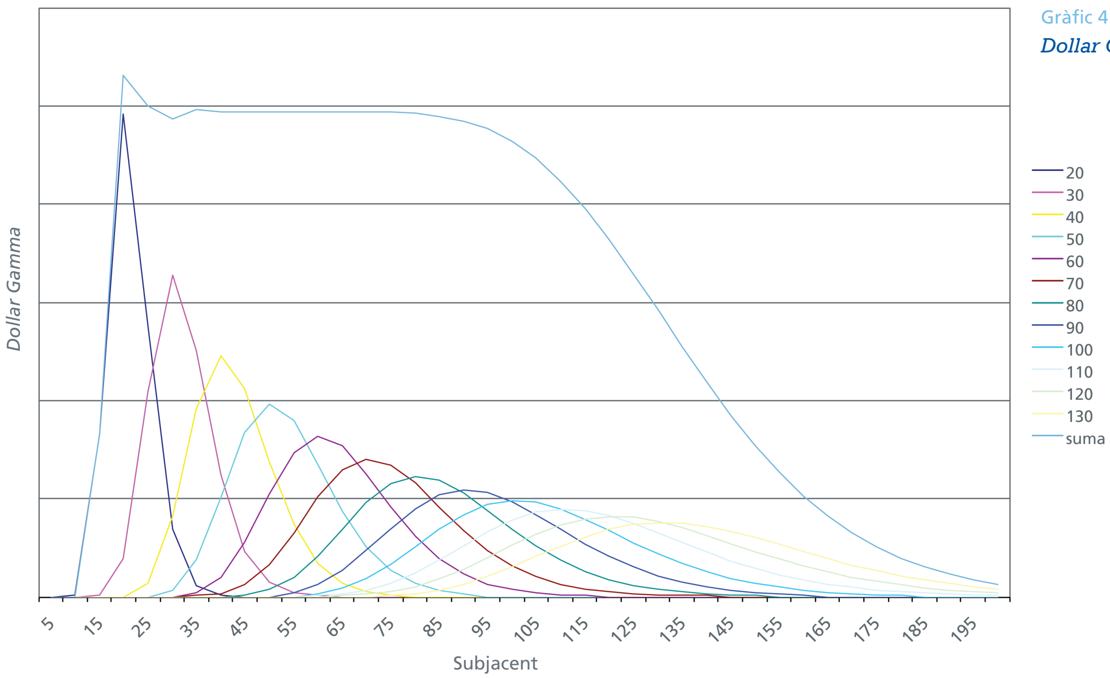
$$VarSwap = \frac{2}{T}\left[\int_0^{S_*}\frac{1}{K^2}Put(k)dk + \int_{S_*}^{\infty}\frac{1}{K^2}Call(k)dk + \right] - \frac{strike^2}{(1+r)^T}$$

(Eq. 14)

Tot i que a primera vista l'expressió anterior pot semblar complicada, realment és "només" la suma de primes de *calls* i *puts* amb una certa ponderació. A nivell real substituirem les integrals per la suma d'opcions amb *strikes* separats per un $\Delta k$ (podem usar per exemple 5%) i en cas de




Gràfic 3
*Dollar Gamma* $w(k) = \dfrac{\alpha}{k}$




Gràfic 4
*Dollar Gamma* $w(k) = \dfrac{\alpha}{k^2}$

fer la cobertura encara es considerarien menys opcions (un $\Delta k$ superior). En l'expressió anterior $S_*$ representa el nivell ATM *forward*.

Per poder calcular les primes de les opcions el que necessitarem és tenir una superfície de volatilitat ben calibrada, ja que normalment només tindrem preus de mercat per a *strikes* propers al nivell actual de l'actiu (ATM *strikes*). Amb aquesta superfície calcularem les primes de *calls* i *puts*.

## Cotitzacions de *swaps* de variància

Els *swaps* de variància cotitzen de forma semblant a com cotitza un *swap* de tipus d'interès, és a dir, cotitza l'*strike*. El nivell que s'observa en el gràfic posterior són els $K_{var}$ que s'han utilitzat en la definició (gràfic 5).

Com es pot veure en el gràfic 5, aquests *swaps* solen cotitzar amb una obertura d'entre 0,5% i 2% i es negocien majoritàriament sobre índexs (per exemple Euro-Stoxx 50), tot i que també es poden negociar directament sobre valors.

## Theta vs gamma



Si pensem que tenim un llibre d'opcions *vanilla*, la theta i la gamma sempre tindran signe contrari; és a dir, llibres amb theta positiva tindran gamma negativa i viceversa. Optimitzar la gestió d'un llibre, per exemple amb theta negativa, implica ser capaç de capturar [4] el màxim de gamma possible. Bàsicament hi ha tres grans criteris per definir la gestió gamma:

1. Escollir un horitzó temporal, que defineix la cobertura cada $\Delta t$. Per exemple cobrir a l'obertura i al tancament de la sessió o bé cada 2 hores (en general cada $n$ hores). Aquest criteri simplifica la cobertura però no ens garanteix que capturem gamma suficient per contrarestar la theta que segur perdrem.

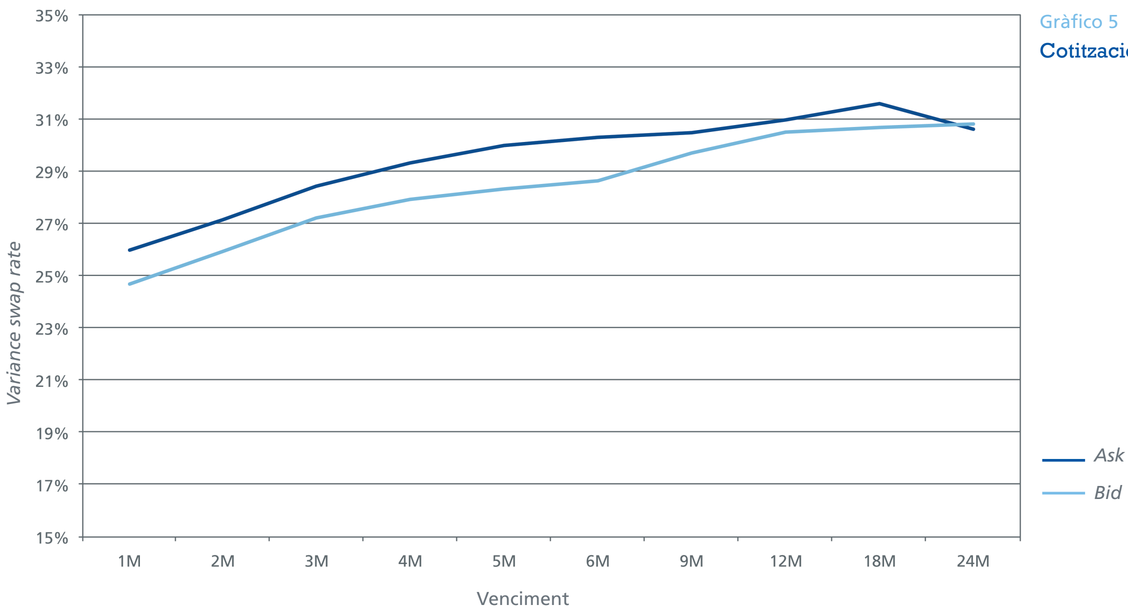
2. Alternativament podríem definir que refarem la nostra cobertura no considerant un $\Delta t$ sinó considerant un $\Delta S$. Per exemple operar només quan el subjacent s'hagi mogut un x% (1%,2%,...)

Les dues maneres que hem comentat no tenen en compte cap paràmetre de l'opció, ni quina és la theta ni la gamma en cada moment, i per tant no garanteixen cap relació entre aquestes sensibilitats.

3. Usar la gamma de l'opció com a base del criteri. Dins aquest criteri s'hi poden trobar diverses variants; una, és considerar la ràtio theta/gamma (o gamma/theta). La idea és recobrir la cartera quan el resultat del benefici/pèrdua per gamma és x vegades la theta; per exemple si es considera 1/3, vol dir que es cobreix la cartera sempre que el resultat per gamma sigui 1/3 de la theta. Això implica que si al final del dia s'ha refet la cobertura més de 3 vegades, el resultat per gamma serà superior a la theta que s'ha invertit. Aquest nombre arbitrari el fixarà l'operador i dependrà bàsicament de com estigui el mercat en cada moment, així com de quin subjacent es tracti.

Més formalment el que s'està fent, quan es basa la gestió en aquesta ràtio, és fer servir l'equivalència $\theta \approx -\frac{1}{2}\Gamma \cdot (\Delta S)^2$, per tant intentar capturar com a mínim per gamma el que per theta s'ha perdut.

Així doncs, en un llibre gestionat sota aquest criteri, la gestió equival a garantir el *payoff* d'una suma de *variance swaps* (formats per la suma de cadascuna de les opcions).




Gràfico 5
Cotització *Variance Swap*

Per tant podríem entendre també els *swaps* de variància com un instrument alternatiu a la gestió dinàmica d'un llibre d'opcions.

## Conclusió

Tant els *swaps* de variància com els *swap* de volatilitat representen una nova generació de derivats. Analitzant les sensibilitats dels derivats estàndard (món Black–Scholes) obtenim expressions que es consideren productes d'una i altra generació; en concret podem escriure la rèplica estàtica d'un *swap* de variància en base a opcions simples. Aquest resultat, implícitament, en comporta molts d'altres; podem calcular primes i sensibilitats dels nous productes en base a les expressions que ja disposàvem sobre les opcions senzilles. També ens ajuda a veure'n l'ús com a eina de gestió en carteres d'opcions simples, així com ens facilita l'exposició directa a la volatilitat i la possibilitat d'exposició a l'*spread* de volatilitat implícita contra realitzada.

### Peus de pàgina

(1) En la pràctica, a dia d'avui la volatilitat sempre s'entén com $\sigma(t,k)$, és a dir, que la volatilitat no és única i constant per a un actiu, sinó que depèn del temps *(t)* i de l'*strike (k)*. Definint $\sigma(t,k)$ la superfície de volatilitat de l'actiu.

(2) En l'apartat *swaps* de variància i gestió delta d'una opció *vanilla* veurem analíticament el resultat de considerar només la delta i la gamma.

(3) En un món ideal (Black–Scholes) no hi hauria distinció entre les tres volatilitats.

(4) L'expressió capturar gamma equival a veure quina és la volatilitat que recollim en la nostra cobertura, que en l'apartat anterior hem definit com $\sigma_g$.

### Bibliografia


Bossu, Sebastien; Strasser, Eva; Guichard, Regis; *"Just what you need to know about variance swaps"*; JPMorgan Equity Derivatives, Report; 2005.

Bossu, Sebastien; *"Option trading and variance swaps"*; Equity Derivatives Workshop for The University of Chicago; 2005.

Carr, Peter; Lee, Roger; *"Robust Replication of Volatility Derivatives"*; http://www.math.nyu.edu/research/carrp/research.html; 2003.

Demeterfi, Kresimir; Derman, Emanuel; Kamal, Michael; Zou, Joseph; *"A Guide to Volatility and Variance swaps";* The Journal of Derivatives; 6; 1999.

Demeterfi, Kresimir; Derman, Emanuel; Kamal, Michael; Zou, Joseph; *"More Than You Ever Wanted To Know About Volatility Swap s"*; Goldman Sachs: Quantitative Strategies Research Notes; 1999.

Gairat, Alexander; *"Variance swaps"*; IVolatility.

http://www.ivolatility.com/doc/varianceswaps.pdf.

Hull, John; Options, Futures, and Other Derivatives; Technical Note No. 22. Séptima edición.

Javaheri, Alireza; Wilmott, Paul; Haug, Espen G.*"GARCH and volatility swaps"*. http://www.wilmott.com.

Petkovic, Danijela; *Pricing variance swaps by using two methods: replication strategy and a stochastic volatility model"*. Halmstad University; 2008.

Swishchuk, Anatoliy; *Modeling of Variance and Volatility Swaps for Financial Markets with Stochastic Volatilities*. http://www.wilmott.com.


### Sobre l'autor


Jordi Planagumà i Vallsquer, llicenciat en matemàtiques per la UPC i màster en Finances quantitatives per AFI. *Trader* de derivats de renda variable a "la Caixa", professor del postgrau "Eines quantitatives per als mercats financers" (FME-UPC) i professor col·laborador de l'IEF.



La responsabilitat de les opinions emeses en aquest document correspon exclusivament als seus autors. ODF no s'identifica necessariament amb les seves opinions.

(C) Fundació Privada Institut d'Estudis Financers. Reservats tots els drets.