

# L'equació general de capitalització i els factors de capitalització unitaris: una aplicació de l'anàlisi de dades funcionals

Cèsar Villazón  
Lina Sanou

## Resum

La fórmula general de capitalització té en compte només el creixement del valor d'un capital atenent que els tipus d'interès de les successives reinversions són positius. Però quan considerem una successió de tipus EURIBOR a 1 dia i calculem els corresponents valors finals, veiem que aquest creixement no és uniforme sinó que presenta intervals de temps amb forta acceleració i d'altres amb acceleració negativa.

Ens plantejem, doncs, la necessitat de formular de nou la llei general de capitalització de manera que inclogui aquestes característiques i arribarem a la ja coneguda equació diferencial (de segon ordre) del creixement i a la solució general.

Per tal de poder trobar la solució particular per a cada cas concret ens proposem fer una estimació amb les dades que disposem utilitzant les tècniques que ens ofereix l'anàlisi de dades funcionals i, més concretament, les tècniques de suavització amb funcions *B-spline*.

Creiem oportú incloure un apèndix en què de manera molt resumida, però entenedora, exposem els principis bàsics de l'ajust amb funcions *splines* seguit d'un breu resum de l'anàlisi de dades funcionals i acabem amb la definició de les bases de les funcions *splines*.

Podem considerar que aquesta primera aproximació ha resultat satisfactòria sobretot tenint en compte les dificultats que planteja l'estimació de funcions estrictament creixents i amb força variabilitat.

# ÍNDEX

RESUM	1		
ANTECEDENTS	4		
1 FÓRMULA GENERAL DE CAPITALITZACIÓ			
2 CAPITALITZACIÓ CONTÍNUA A TIPUS D'INTERÈS CONSTANT			
2.1 DEDUCCIÓ TRIVIAL DEL TIPUS $\delta$			
2.2 DESCOMPOSICIÓ EN PERÍODES SUCCESSIUS DE CAPITALITZACIÓ			
2.3 FACTORS DE CAPITALITZACIÓ UNITARIS	5		
2.4 INTERPRETACIÓ I LIMITACIONS DE $\delta_i(t_{i-1}, t_i)$			
EXEMPLE 1			
3 FORMA DE LA CORBA DE CREIXEMENT: PUNTS D'INFLEXIÓ	6		
4 VELOCITAT I ACCELERACIÓ DEL CREIXEMENT DEL VALOR ACUMULAT			
5 RESOLUCIÓ DE L'EQUACIÓ DIFERENCIAL $\frac{d^2C(t)}{dt^2} = w(t) \cdot \frac{dC(t)}{dt}$	7		
6 DE LES DADES DISCRETES A LES DADES FUNCIONALS	8		
7 AJUST PER MQO AMB <i>B-SPLINES</i>			
7.1 FACTORS DE CAPITALITZACIÓ UNITARIS (FCU) AMB TIPUS A 6 MESOS			
7.2 VALORS FINALS AMB TIPUS A 1 MES	9		
8 AJUST AMB FUNCIONS ERICTAMENT MONÒTONES			
9 IMPLICACIONS DE L'AJUST AMB <i>B-SPLINES</i>			
9.1 EL BIAIX DE L'ESTIMACIÓ			
9.2 LA VARIÀNCIA DE L'ESTIMACIÓ	10		
9.3 L'ERROR QUADRÀTIC MITJÀ (EQM)			
9.4 RELACIÓ ENTRE BIAIX, VARIÀNCIA I ERROR QUADRÀTIC MITJÀ			
9.5 QUANTIFICACIÓ DE LA RUGOSITAT ( <i>ROUGHNESS</i> )			
Figura 8			
9.6 APLICACIÓ A L'ESTIMACIÓ MQ			
10 RESPOSTA A LES IMPLICACIONS DE L'AJUST AMB <i>B-SPLINES</i>	11		
11 FACTORS DE CAPITALITZACIÓ UNITARIS A UN MES			
11.1 AJUST AMB RESTRICCIÓ DE CREIXEMENT I PENALITZACIÓ			
11.2 SUAVITZACIÓ AMB PENALITZACIÓ A LA CURVATURA			
12 LA SUAVITZACIÓ AMB NODES EQUIDISTANTS	12		
12.1 INTERPOLACIÓ DELS FACTORS DE CAPITALITZACIÓ UNITARIS			
13 EXTENSIONES DE LA INTERPOLACIÓ			
TAULES I FIGURES			
Taula 1: Punts d'inflexió aproximats dels factors de capitalització unitaris a 1 dia durant el primer any.			
Taula 2: Distribució dels punts d'inflexió durant tot el període d'observació.	13		
Figura 1: Divisió de l'interval d'integració en subintervalls parcials.			
Figura 2: Evolució dels tipus EURIBOR a 1 dia.			
Figura 3: Evolució dels factors de capitalització unitaris des de gener de 2001 fins a desembre de 2009. El temps està expressat en fracció d'any.			
Figura 4: Tipus EURIBOR a 6 mesos.			
Taula 3: Factors de capitalització unitaris a 6 mesos i l'ajust.			
Figura 5: Representació de les xifres indicades a la taula 3.	14		
Figura 6: Tipus EURIBOR a 1 mes.			
Figura 7: Valors finals reals calculats amb l'EURIBOR a 1MES i valors finals a 1MES estimats sense restriccions.			
Figura 8: Darreres 26 observacions i els valors ajustats.			
Figura 9: Observacions discretes, ajust amb variabilitat alta i ajust sense rugositat.			
Taula4: Nodes, ordre de les <i>splines</i> , nombre de funcions bases, creació de les <i>B-splines</i> , nodes interiors	15		
Figura 10: Suavitzaió dels factors de capitalització unitaris a 1MES amb la restricció de creixement absolut i sense penalització per variabilitat.			
Figura 11: Suavitzaió dels factors de capitalització unitaris a 1MES amb la restricció de creixement absolut, amb un factor de penalització igual a dos i un paràmetre de suavització $\lambda = 10^{-0,5}$ .			
Figura 12: Valors reals observats i valors estimats dels factors de capitalització unitaris. La suavització s'ha fet sense restriccions de creixement però amb penalització a la derivada segona amb un paràmetre de penalització $\lambda = 10^{-0,01}$ .			
Figura 13: Errors de l'estimació; encara que al tram final es disparen no arriba a ser més de l'1,5 per mil.			
Figura 14: Suavitzaió <i>fine</i> amb 200 nodes mantenint els dos nodes exteriors i els seus corresponents valors estimats.			

Figura 15: Velocitat del creixement dels factors unitaris de capitalització a 1 mes calculats amb la primera derivada de la funció suavitzadora que hem representat a la figura 14.

Figura 16: Acceleració del creixement dels factors de capitalització unitaris, calculats com la segona derivada de les *B-splines* que donen lloc a la funció suavitzadora de la figura 14.

## APÈNDIX

### INTRODUCCIÓ

A.1.	EXEMPLE D'APROXIMACIÓ MITJANÇANT <i>SPLINES</i>	
A.2	NODES I GRAUS DE LLIBERTAT	18
	Taula A1	19
	Taula A2	
	Taula A3	
	EXEMPLE A.2	20
A.3	GENERALITZACIÓ: LA FÓRMULA D'INTERPOLACIÓ DE NEWTON	
A.3.1	PROPIETATS	21
A.3.2	CONTINUACIÓ EXEMPLE A3	
A.4	DIFERÈNCIES DIVIDIDES I EL POLINOMI DE NEWTON	
A.5	DEFINICIÓ DE DIFERÈNCIA DIVIDIDA	
A.5.1	CONSEQÜÈNCIES DE LA DEFINICIÓ: EXEMPLE A.4	22
A.6	LA FORMA DE LA CORBA I LES DIFERÈNCIES DIVIDIDES D'UNA FUNCIÓ	
A.7	DIFERÈNCIES DIVIDIDES DEL MONOMI $(t-x)^{k-1}$	
A.8	DEFINICIÓ DE <i>B-SPLINE</i>	
A.8.1	PROPIETATS DE LES <i>B-SPLINE</i>	23
A.9	ESTIMACIÓ PER MÍNIMS QUADRATS ORDINARIS (MQO) AMB UNA FUNCIÓ <i>B-SPLINE</i>	
	TAULES I FIGURES DE L'APÈNDIX	
	Taula A4	25
	Taula A5	
	Diferències dividides d'una funció d'ordre $n$	
	Figura A1	26
	Figura A2	
	Figura A3	
	Figures A4, A5 i A6	
	CONCLUSIONS I PROLONGACIÓ DEL TREBALL	27
	BIBLIOGRAFIA CONSULTADA	28
	PROGRAMARI UTILITZAT	
	SOBRE ELS AUTORS	

## ANTECEDENTS

L'any 1871. Stanley Jevons en la seva obra *The Theory of Political Economy*. Reprint. Edited by R. D. Collison Black. Harmondsworth: Penguin Books, 1970 va formular els principis que més tard hem interpretat com la llei general de capitalització.

A partir d'aleshores Insolera en la seva obra «Curso de Matemática Financiera y Actuarial» i posteriorment altres autors van aplicar el raonament de Jevons en el cas d'un capital sotmès a un procés de capitalització.

## 1 FÓRMULA GENERAL DE CAPITALITZACIÓ

Considerem un capital  $C(t)$  sotmès a un procés de capitalització aquell que els interessos que ha anat produint s'han anat acumulant immediatament al capital. Això suposa que tant el capital  $C(t)$  com el propi temps  $t$  són funcions contínues, entenent-se que la primera és una funció contínua del temps i que la segona és la variable independent real.

Igualment suposarem que el tipus d'interès que s'ha d'aplicar en cada instant, és una funció contínua del temps que representarem per  $\rho(t)$ . Si el capital  $C(t)$  està invertit durant un infinitèsim de temps:  $dt$ , els interessos produïts per aquest capital seran:

$$C(t) \cdot \rho(t) \cdot dt = dC(t) \quad (1)$$

Aquesta equació diferencial es pot resoldre fàcilment; per fer-ho passem  $C(t)$  al segon membre i a continuació integrem:

$$\ln C(t) + k = \int \rho(t) dt \quad (2)$$

On  $k$  és la constant que s'ha sumat a qualsevol integral indefinida.

És del tot il·lògic que el valor d'un capital depengui d'una constant indeterminada; però si tenim en compte que tot procés de capitalització té una data d'inici (0) i que també finalitza en un instant concret ( $T$ ), hauríem de considerar l'anterior integral com a definida, i obtenim:

$$C(t) = C(0) \cdot \exp \left[ \int_0^t \rho(t) dt \right] \quad (3)$$

La integral definida:

$$\int_0^T \rho(t) dt \quad (4)$$

Mesura els interessos acumulats per una unitat monetària

durant el període de capitalització que va des de l'instant inicial 0 fins el moment final  $T$ .

## 2 CAPITALITZACIÓ CONTÍNUA A TIPUS D'INTERÈS CONSTANT

A la pràctica no s'acostuma a utilitzar el règim general de capitalització ja que la seva aplicació és molt enutjosa i se substitueix per la capitalització contínua o, tal com es denomina en la literatura anglosaxona, la capitalització composta contínuament, que vol dir que el valor final d'un capital es pot obtenir aplicant un tipus de interès constant per tot el període.

Si en la fórmula general de capitalització, resollem la integral de l'exponent del segon membre, tindrem que:

$$C(T) = C(0) \cdot \exp \left[ \int_0^T \rho(t) dt \right] = C(0) \cdot e^{\varphi(T)} \quad (5)$$

### 2.1 DEDUCCIÓ TRIVIAL DEL TIPUS $\delta$

Si considerem que  $\rho(t)$  és constant durant tot el període de capitalització:  $\rho(t) = \delta$ , de manera que un cop integrada la funció, resulta  $\delta \cdot T$ ; a posteriori això significa que el valor de la funció  $\varphi(T)$  també és igual a  $\delta \cdot T$ . Així:

$$\{\rho(t) = \text{CONSTANT} \equiv \delta, \forall t \in (0, T)\} \Rightarrow \varphi(T) = \delta \cdot T \quad (6)$$

I d'aquesta manera hem obtingut com a valor final:

$$C(T) = C(0) \cdot e^{\delta T} \quad (7)$$

La forma més còmoda d'obtenir el tipus d'interès en capitalització contínua consisteix a aïllar  $\delta$  de l'equació (6), i resulta:

$$\delta = \frac{\varphi(T)}{T} \quad (8)$$

És evident que l'aproximació de  $\rho(t)$  per una constant serà més bona quan més petit sigui el període de capitalització i la substitució de  $\rho(t)$  per  $\delta$  no plantejarà cap problema si  $\Delta t$  és un infinitèsim.

### 2.2 DESCOMPOSICIÓ EN PERÍODES SUCCESSIUS DE CAPITALITZACIÓ

Podem utilitzar una propietat de la integral definida, la qual ens permet descompondre l'interval total d'integració en subinterval tan petits com desitgem.

Això és dividint l'interval total d'integració  $(0, T)$  en subinterval parcials consecutius de manera que l'origen del primer subinterval és igual a 0 i l'extrem del darrer

és igual a  $T$ , i si, a més a més, fem que l'extrem de cada subinterval sigui l'origen del següent d'acord amb l'esquema dissenyat a la figura 1.

Tenint en compte el que acabem de dir, podem descompondre l'interval d'integració en els subintervalls descrits en la figura 1, d'aquesta manera l'integral (4) quedaria escrita de la manera següent:

$$\int_0^T \rho(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \rho(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt + \int_{t_2}^{t_3} \rho(t) dt + \dots + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \rho(t) dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \rho(t) dt \quad (9)$$

A cadascuna de les integrals anteriors podem aplicar-hi el teorema del valor mig, la qual cosa significa que existeix un conjunt de paràmetres  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$  que verifiquen l'equació següent:

$$\begin{aligned} \int_0^T \rho(t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \rho(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt + \int_{t_2}^{t_3} \rho(t) dt + \dots + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \rho(t) dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \rho(t) dt = \\ &= \Delta t_1 \cdot \rho(t_0 + \Theta_1 \cdot \Delta t_1) + \Delta t_2 \cdot \rho(t_1 + \Theta_2 \cdot \Delta t_2) + \dots + \Delta t_n \cdot \rho(t_{n-1} + \Theta_n \cdot \Delta t_n) \end{aligned} \quad (10)$$

Amb això, la integral  $\int_0^T \rho(t) dt$  es pot escriure de manera equivalent mitjançant l'expressió:

$$\int_0^T \rho(t) dt = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot \rho(t_{i-1} + \Theta_i \cdot \Delta t_i) \quad (11)$$

Tenint en compte que totes i cadascuna de les expressions  $\Delta t_i \cdot \rho(t_{i-1} + \Theta_i \cdot \Delta t_i)$  que apareixen en el segon membre de (11) queden reduïdes a constants, les quals podem designar per  $\delta_i(t_{i-1}, t_i)$ , i resulta:

$$\int_0^T \rho(t) dt = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot \rho(t_{i-1} + \Theta_i \cdot \Delta t_i) = \sum_{i=1}^n \delta_i(t_{i-1}, t_i) \cdot \Delta t_i \quad (12)$$

Amb la qual cosa el valor final d'un capital  $C(0)$  col·locat en un règim de capitalització definit per una funció contínua  $\rho(t)$  que hem deduït segons la fórmula (5) es pot calcular de manera equivalent mitjançant una successió de capitalitzacions compostes contínuament amb els tipus d'interès discrets  $([\delta_i(t_{i-1}, t_i) \quad i = 1, 2, \dots, n])$ , i els valors finals obtinguts són idènticament iguals:

$$C(T) = C(0) \cdot \exp\left[\int_0^T \rho(t) dt\right] \Leftrightarrow C(T) = C(0) \cdot \exp\left[\sum_{i=1}^n \delta_i(t_{i-1}, t_i) \cdot \Delta t_i\right] \quad (13)$$

## 2.3 FACTORS DE CAPITALITZACIÓ UNITARIS

Si considerem que el capital inicialment invertit és d'una unitat monetària el segon membre de la segona equació de (13) queda:

$$\exp\left[\sum_{i=1}^n \delta_i(t_{i-1}, t_i) \cdot \Delta t_i\right]$$

Cadascuna de les exponencials que apareixen rep el nom de **factor capitalització** que de manera genèrica podem designar per  $e^{\delta t}$ .

Per exemple, si el tipus anual de capitalització contínua és del 6%, el factor de capitalització unitari és:  $e^{0,06} = 1,06183655$ . Si s'ha invertit un milió d'euros el valor final al cap d'un any és:  $1.000.000 \times 1,06183655 = 1.061.836,55 \text{ €}$ .

## 2.4 INTERPRETACIÓ I LIMITACIONS DE $\delta_i(t_{i-1}, t_i)$

Sempre que els intervals de temps siguin suficientment petits és indiferent aplicar la primera o la segona de les (13). Si considerem que el termini més petit utilitzat en els mercats financers és un dia (TN) i que els tipus sempre són anuals, l'increment de  $t$  expressat en anys seria igual a:  $\Delta t = \frac{1}{365} = 0,0027397260 \approx 0,00274$  anys.

### EXEMPLE 1

Considerem una successió de tipus EURIBOR a 1DIA, des de 31 de desembre de 1998 fins a 31 de desembre de 2009 (figura 2)<sup>1</sup>. Utilitzant la terminologia feta servir a l'apartat 2.2 disposem d'una sèrie temporal de 4.019 tipus diaris:  $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{4018}$ , de manera que considerats conjuntament configurarien una funció  $\rho(t)$  de la qual desconexem l'estructura funcional, però sí sabem que el valor final d'una unitat monetària invertida durant els 4.019 dies als tipus diaris corresponents ens donaria a 1 de gener de 2010 un valor final de 1,3875733. Aquesta operació és completament lícita atès que coneixem els tipus diaris abans de fer la reinversió<sup>2</sup>.

També podríem calcular els tipus d'interès equivalents en capitalització contínua mitjançant la fórmula:  $\delta(\text{diari}) = \ln\left(1 + \frac{i}{36000}\right)$ .

Hem dividit els tipus EURIBOR per 36.000 perquè:

- la convenció utilitzada en els mercats monetaris de l'EUROZONA és considerar l'any comercial de 360 dies en les operacions a curt termini i,
- els tipus EURIBOR estan expressats en percentatge.

Amb tot això disposaríem de la sèrie temporal de tipus en capitalització contínua:  $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{4018}$  que ens proporcionen els mateixos valors finals.

A la figura 3, hem representat l'evolució dels valors finals assolits durant aquest període de temps. De la simple observació podem extreure les conclusions següents:

- La sèrie de valors finals és creixent atès que els tipus d'interès són sempre positius.
- El creixement no és uniforme. És a dir, la corba presenta un comportament irregular passant de convexa a còncava i viceversa, la qual cosa significa que l'equació diferencial plantejada (1) representativa de l'evolució del valor final d'un capital i la seva solució que és una funció exponencial del tipus:

$$\exp \left[ \int_0^T \rho(t) dt \right]$$

no són suficients per capturar totes les característiques de la forma (*shape*) de la corba representada a la gràfica.

### 3 FORMA DE LA CORBA DE CREIXEMENT: PUNTS D'INFLEXIÓ

Hom pot pensar que, encara que el creixement no sigui uniforme i sostingut, no paga la pena tenir en compte els pocs canvis en l'acceleració que se'n dedueixen de les gràfiques.

6 Però si calculem el valor aproximat de les derivades segones a partir dels valors capitalitzats obtinguts, utilitzant la fórmula<sup>3</sup>:

$$C''(t_i) \approx \frac{\frac{C(t_{i+1}) - C(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \frac{C(t_i) - C(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (14)$$

i aplicant, ara, aquesta fórmula, calculem els valors aproximats de la derivada segona de les col·locacions a 1DIA, un resum del qual es pot veure a la taula 1, on hem trobat els valors aproximats de la derivada segona pel mes de gener de 1999, i veiem que ha canviat de signe 8 vegades durant el període d'un mes.

Podríem fer el mateix prenent diferents períodes, però per no allargar innecessàriament el procés, hem dividit el període total d'observació en 16 intervals iguals que contenen 250 observacions cadascun, més un addicional de només 16 valors finals; en cadascun d'aquests intervals hem comptat el nombre total de canvis de signe que representen en mitjana un 31% amb un pic del 49% en el període comprès entre el 8/4/09 i el 13/12/09 i un mínim del 19% en l'interval de temps que va des del 5/11/05

al 12/7/06, resultats que presentem a la taula 2.

Tenint tot el que acabem de veure respecte al comportament i evolució de la funció valor final d'un capital, podem formular les hipòtesis següents:

- La funció  $C(t)$  és monòtona, creix sempre que els tipus d'interès siguin positius; per tant, la derivada primera haurà de ser positiva.
- La funció  $C(t)$  pot ser còncava o convexa depenent de l'interval de temps que es consideri, la qual cosa significa que la derivada segona no té signe constant.

Per tal de poder incorporar aquestes hipòtesis ens proposem modificar el model especificat per l'equació diferencial (1) i la seva solució (2) representativa del valor final d'un capital segons el que expliquem a l'epígraf següent.

### 4 VELOCITAT I ACCELERACIÓ DEL CREIXEMENT DEL VALOR ACUMULAT

En comptes de velocitat i acceleració en el creixement del valor acumulat, podríem utilitzar un llenguatge menys «físic» i parlar de:

- corba creixent o decreixent, i
- forma de la corba i/o de concavitat, convexitat i punts d'inflexió.

O de manera equivalent de:

- Derivada primera positiva o negativa
- Derivada segona negativa o positiva

Però preferim fer servir aquesta nomenclatura perquè té un sentit més gràfic i potser més proper a allò que volem explicar.

Considerem el valor final d'un capital en l'instant de temps  $t_i \Rightarrow C(t_i)$ ; en aquest moment el valor acumulat creix a una velocitat  $V(t_i)$  que, tal com hem vist a les representacions gràfiques de l'evolució del valor final d'un capital, serà diferent de la velocitat assolida en l'instant  $t_{i+1} \Rightarrow V(t_{i+1})$ .

Aquesta darrera consideració ens permet introduir el concepte d'acceleració del creixement del valor final d'un capital: l'acceleració és el canvi de velocitat per unitat de temps:

$$\text{Acceleració}(t_i) = \frac{V(t_{i+1}) - V(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \frac{\Delta V(t_i)}{\Delta t_i} \quad (15)$$

Per tal de poder determinar l'equació d'acceleració hem de fer algunes hipòtesis respecte al comportament de la diferència de velocitats  $V(t_{i+1}) - V(t_i)$ :

<sup>1</sup> Aquestes dades s'han obtingut del web del Banc d'Espanya.

<sup>2</sup> No tenim en compte la data valor, l'únic que faria seria retardar la col·locació en dos dies i retardar també la reinversió, però suposem que no altera el valor final de la inversió.

<sup>3</sup> L'explicació d'aquesta fórmula es pot trobar a l'epígraf A.6 de l'Apèndix.

a) És evident que aquesta diferència tendirà a ser més gran (petita) quant més gran (petit) sigui l'interval de temps considerat  $t_{i+1} - t_i$ , de manera que sense pèrdua de generalitat podem dir que  $V(t_{i+1}) - V(t_i)$  serà directament proporcional a l'amplitud de l'interval  $t_{i+1} - t_i$ .

b) També dependrà de la velocitat assolida en el moment  $t_i \Rightarrow V(t_i)$ ; suposarem, doncs, que la diferència  $V(t_{i+1}) - V(t_i)$  és, també, directament proporcional a  $V(t_i)$ , que és la velocitat en el punt inicial de l'interval considerat.

c) Finalment, considerem que aquesta diferència de velocitats depèn d'un paràmetre variable  $w(t_i)$  que representa el canvi en la velocitat i per aquesta raó el denominarem **paràmetre d'acceleració**; quant més gran sigui  $w(t_i)$  més gran serà l'acceleració; per tant, la diferència  $V(t_{i+1}) - V(t_i)$  també serà directament proporcional al paràmetre d'acceleració  $w(t_i)$ .

Amb tot això tenim que l'increment de velocitat:  $\Delta V(t_i) = V(t_{i+1}) - V(t_i)$  és directament proporcional a cadascuna de les magnituds següents:

- A l'interval  $t_{i+1} - t_i$
- A la velocitat inicial  $V(t_i)$
- Al paràmetre d'acceleració (desconegut)  $w(t_i)$

Escrivint l'equació (de proporcionalitat composta), que relaciona l'increment de velocitat amb aquestes tres variables:

$$V(t_{i+1}) - V(t_i) = V(t_i) \cdot w(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

Podem expressar l'equació d'acceleració (15) com:

$$\frac{V(t_{i+1}) - V(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = V(t_i) \cdot w(t_i) \Rightarrow \frac{\Delta V(t_i)}{\Delta t_i} = V(t_i) \cdot w(t_i) \quad (16)$$

Això ens permetrà obtenir  $w(t_i)$ .

Quan  $t_{i+1} - t_i = \Delta t_i$  tendeix a zero, es transforma en  $dt$  i si la funció  $V(t_i)$  és contínua<sup>4</sup> i diferenciable amb continuïtat, esdevé en  $dV(t)$ , amb la qual cosa tenim:

$$\frac{dV(t)}{dt} = V(t) \cdot w(t) \quad (17)$$

Tenint en compte que  $\frac{dV(t)}{dt}$  representa l'acceleració  $A(t)$ , resulta que:

$$A(t) = V(t) \cdot w(t) \quad (18)$$

I aïllant  $w(t)$ , tenim:

$$w(t) = \frac{A(t)}{V(t)} \quad (19)$$

És a dir, que  $w(t)$  representa la **ràtio d'acceleració respecte a la velocitat**, o sigui que és l'acceleració relativa i significa que l'acceleració del creixement del valor acumulat (valor capitalitzat) es mesura com una fracció de la velocitat.

Atès que:

$$\frac{dC(t)}{dt} = V(t) \Rightarrow \frac{d^2C(t)}{dt^2} = \frac{dV(t)}{dt} = A(t) \quad (20)$$

I substituint l'equació (18), resulta:

$$\frac{d^2C(t)}{dt^2} = w(t) \cdot \frac{dC(t)}{dt} \quad (21)$$

Equació diferencial de segon ordre que resolta ens proporcionarà una fórmula més general de l'evolució del capital acumulat que la deduida a l'epígraf 1, que només té en compte la velocitat en el creixement del capital acumulat.

## 5 RESOLUCIÓ DE L'EQUACIÓ DIFERENCIAL

$$\frac{d^2C(t)}{dt^2} = w(t) \cdot \frac{dC(t)}{dt}$$

És molt senzilla de resoldre, però per fer-ho encara més senzill, anomenem:

$$y(t) \text{ a } \frac{dC(t)}{dt}, \text{ per tant, } \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2C(t)}{dt^2} \quad (22)$$

Substituïm aquests resultats a (21):

$$\frac{dy(t)}{dt} = w(t) \cdot y(t) \quad (23)$$

Separem les variables, queda:

$$\frac{dy(t)}{y(t)} = w(t) \cdot dt \quad (24)$$

Fem les operacions i les integrem per tal d'aïllar  $y(t)$ :

$$\int_0^u \frac{dy(t)}{y(t)} = \int_0^u w(t) dt \Rightarrow y(u) = y(0) \cdot \exp \left[ \int_0^u w(t) dt \right] \quad (25)$$

Desfent el canvi de variable (22), queda:

$$\frac{dC(u)}{du} = y(0) \cdot \exp \left[ \int_0^u w(t) dt \right] \quad (26)$$

Separant variables:

$$\int_0^t dC(u) = \int_0^t y(0) \cdot \exp \left[ \int_0^u w(t) dt \right] du \quad (27)$$

Integrant:

$$C(t) = C(0) + \int_0^t y(0) \cdot \exp \left[ \int_0^u w(t) dt \right] du \quad (28)$$

<sup>4</sup> Quan es faci l'estimació d'aquest model no solament s'ha d'imposar la condició de continuïtat sinó també la diferenciabletat de la funció de velocitat.



En la qual  $y(0)$  és el valor de la derivada de  $C(t)$  que com hem vist és la velocitat del creixement del valor final en el punt 0, és a dir:

$$y(0) = \left[ \frac{dC(t)}{dt} \right]_{t=0}.$$

Atès que els tipus d'interès EURIBOR no són negatius, la funció  $C(t)$  és **positiva i monòtona creixent**, en conseqüència la seva derivada primera,  $y(t) = \left[ \frac{dC(t)}{dt} \right]$  també ha de ser positiva.

Aquestes dues restriccions s'han de tenir en compte quan s'intenti fer una estimació de la funció d'acceleració  $w(t)$ .

## 6 DE LES DADES DISCRETES A LES DADES FUNCIONALS

A l'exemple 1 hem comprovat que el creixement dels valors finals en cada venciment no és uniforme atès que es produeixen canvis en la velocitat del creixement. Ens agradaria, però, poder aplicar la teoria de l'evolució del valor final expressada per l'equació diferencial (21) i la solució formulada a (28).

Tenint en compte que estem interessats en l'evolució de l'acceleració del creixement del valor final, necessitem ajustar una funció  $w(t)$  que la seva derivada tercera sigui diferent de zero, però com que la  $w(t)$  és la derivada segona del creixement del valor final del capital, si ajustéssim un polinomi hauria de ser de grau 5.

Encara que aquesta sèrie temporal de valors finals observats sigui discreta, presenta unes característiques de creixement, de concavitat i/o de convexitat similars a les d'una funció analítica explícita:  $f(x)$ . De manera que si aquesta funció és creixent aconsegueix que  $f'(x) > 0$  i per saber si és còncava o convexa cercaríem el signe de la seva derivada segona en un punt o en un interval segons desitgéssim, i el mateix podem dir de la funció d'acceleració.

És evident que si no trobem un procediment d'ajust de càlcul ràpid i eficient, la teoria sobre l'evolució del creixement del valor final d'un capital no podria ser contrastada i quedaria en una mera elucubració teòrica; afortunadament no és aquest el cas ja que encara que algunes de les característiques de creixement del valor final queden amagades o com a mínim emmascarades pel caràcter discrecional de les dades, es poden posar de manifest mitjançant l'anàlisi de dades funcionals (*Functional Data Analysis*: **FDA**).

La forma explícita que ens ofereix l'anàlisi de dades fun-

cionals per representar qualsevol punt de valor final és mitjançant el parell ordenat  $(t_i, y_i)$ , on el primer element correspon al temps i el segon, el valor obtingut en aquella data.

Si assumim l'existència d'una funció  $x$  que dona origen als valors finals obtinguts, podem presentar les dades mitjançant el model:

$$y_i = x(t_i) + \varepsilon_i \quad (29)$$

On  $x(t_i)$  és una funció suavitzadora, amb la qual cosa hem passat les parts anguloses de les observacions inicials al terme d'error que també subsumeix els errors d'observació. Hem transformat, doncs, les observacions discretes en dades funcionals.

La suavització de les dades es pot dur a terme utilitzant *splines*, en el nostre cas, seguint l'anàlisi de dades funcionals de Ramsay i Silverman, farem servir un sistema de **base de splines** o **B-splines** d'acord amb la terminologia utilitzada per Carl de Boor (2001)<sup>5</sup>, la qual es pot consultar a l'apèndix B, i que utilitzarem aquí a les aplicacions pràctiques que desenvolupem a continuació.

## 7 AJUST PER MQO AMB B-SPLINES

### 7.1 FACTORS DE CAPITALITZACIÓ UNITARIS (FCU) AMB TIPUS A 6 MESOS

Una unitat monetària s'inverteix a 6 mesos al tipus EURIBOR del dia, tenint en compte el següent: el dia de venciment es renova automàticament durant 6 mesos més fins que es pugui i si el dia de la renovació hi ha mercat, el tipus d'interès serà el d'aquell dia; si no hi ha mercat es pren el tipus del darrer dia hàbil; per exemple, si la renovació cau en diumenge prendrem el tipus del divendres anterior i si no és possible el del dijous i així successivament fins arribar a la darrera reinversió<sup>6</sup>. L'evolució dels tipus EURIBOR a 6 mesos es pot veure a la figura 4.

Considerem l'evolució dels valors finals d'aquesta unitat monetària a 6 mesos, invertida el 31 de desembre de 1998 (inversió inicial) fins al 31 de desembre de 2010 que és la darrera reinversió que es liquidarà el 30 de juny de 2011, i, per tant, serà l'últim valor final, mentre que el primer valor final observat correspon al primer venciment el 30 de juny de 1999 (tercera columna de la taula 3).

La representació gràfica del conjunt discret de valors finals obtinguts en cada venciment es pot veure a la figura 5 (línia puntejada); les dates de venciment estan expressades en anys i fracció d'any.

A continuació fem un ajust utilitzant el mètode que hem

<sup>5</sup> Capítol IX, pàgina 87 i següents.



explicat a l'epígraf B9 de l'apèndix; les funcions bases emprades en l'estimació són d'ordre 6 (graú 5) i com el nombre de nodes interiors és de 23, el nombre de *splines* serà igual a 29. Els valors obtinguts en l'ajust es poden veure a la quarta columna de la taula 3 i la seva representació gràfica a la línia contínua de la figura 5.

Com podem observar els valors ajustats compleixen la condició de ser creixents en qualsevol moment però no sempre serà així com podem veure a l'ajust següent.

## 7.2 VALORS FINALS AMB TIPUS A 1 MES

Si amb el mateix criteri calculem els valors finals amb els tipus EURIBOR a 1 MES, podem veure en la figura 7 que els valors ajustats durant els tres darrers mesos de la mostra són decreixents; a la figura 8 hem representat els 26 últims valors reals i ajustats i podem comprovar, com a partir del dotzè, els valors ajustats es comencen a comportar de manera estranya, de forma que s'assoleix un màxim tres mesos abans de finalitzar la sèrie de valors observats.

## 8 AJUST AMB FUNCIONS ESTRUCTIVAMENT MONÒTONES

Quan es troben amb aquest entrebanc, Ramsay i Silverman (2005) proposen com a funció d'ajust, una funció estrictament monòtona (creixent); per fer-ho parteixen de la hipòtesi que si estimem la velocitat del creixement, la funció obtinguda ha de ser positiva, de manera que si d'acord amb (29) designem per a  $x(t)$  la funció suavitzadora, la derivada d'aquesta funció la fem igual a una exponencial natural amb un exponent de la forma  $W(t)$ , és a dir:

$$\frac{dx}{dt} = \exp[W(t)] \quad (30)$$

La solució s'obté integrant els dos membres:

$$x(t) = \beta + \int_{t_0}^t \exp[W(u)] du \quad (31)$$

On  $\beta$  és la constant d'integració, haurà de ser estimada a partir de les dades.

L'equació (28) que expressa el valor final del capital, en aquest cas és:

$$x(t) = \beta_0 + \beta_1 \int_{t_0}^t \exp \left[ \int_{t_0}^u w(t) dt \right] du \quad (32)$$

On hem substituït:

$C(t)$  per  $x(t)$ ;  $C(0)$  per  $\beta_0$ ;  $y(0)$  per  $\beta_1$  que evidentment mai pot ser nul·la i, finalment, 0 per  $t_0$  amb la finalitat de generalitzar la solució donada per (28).

Aquesta és la mateixa equació que la que hem obtingut a (31), substituint queda:

$$W(u) = \int_{t_0}^u w(t) dt + \log \beta_1 \quad (33)$$

Quin paper juga la funció  $w$ ?

- Suposem que  $w(t) = 0 \quad \forall t$ ; llavors segons (32) tenim la solució:

$$x(t) = \beta_0 + \beta_1 t$$

- Si  $w(t)$  és una constant diferent de zero, la solució (32) és:  $x(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{wt}$ . Aquí l'exponent és lineal respecte al temps i el propi paràmetre d'acceleració.
- Si  $w(t)$  és una funció, el comportament de  $x(t)$  dependrà dels valors que prengui  $t$ ; per exemple, si és a prop de zero, el seu comportament serà lineal; si  $\beta_1$  és positiu, llavors els valors positius de  $w(t)$  implicaran, localment, un creixement exponencial i si és negatiu, el comportament de creixement serà asimptòtic.

## 9 IMPLICACIONS DE L'AJUST AMB B-splines

L'ajust amb *B-splines* planteja més dubtes a més a més del creixement estricte, que convé resoldre'ls abans d'endinsar-nos en l'estimació pràctica:

- D'acord amb la regla donada a l'epígraf B.2 de l'apèndix, respecte al nombre de graus de llibertat que determina el nombre de funcions bases que utilitzarem en l'ajust, es planteja el problema que aquest sempre serà més gran que el nombre d'observacions. La pregunta que ens formulem és: això invalida o qüestiona d'alguna manera l'estimació per *B-splines*?
- L'estimació per **MQO** amb funcions *B-spline* és correcta? O dit d'una altra manera, quin criteri es fa servir per determinar la bondat de l'ajust?
- Fins ara hem triat com a nombre de nodes el de les observacions i els hem fixat a la mateixa ubicació, però l'elecció del nombre de nodes i la seva ubicació influeix en la bondat de l'ajust?
- La variabilitat de la funció estimada representa un entrebanc per considerar com a bo un ajust?

### 9.1 EL BIAIX DE L'ESTIMACIÓ

El mètode d'estimació amb *B-splines* consisteix a trobar els paràmetres que minimitzen la suma d'errors al quadrat, de manera que de l'equació (29) de dades funcionals  $y_i = x(t_i) + \varepsilon_i$  resulta que la funció a minimitzar és:  $\sum [y_i - x(t_i)]^2$ .

<sup>6</sup> Tampoc tenim en compte la data valor perquè considerem que no té cap incidència important, atès que només retardaria en dos dies tota la sèrie tant a la data d'inici com la de venciment.

Per a valors grans de la mostra el biaix de l'estimació ve donat per:

$$\text{Biaix}[\hat{x}(t)] = x(t) - E[\hat{x}(t)] \quad (34)$$

I, quan la grandària de la mostra tendeix a infinit, el biaix tendeix a zero.

## 9.2 LA VARIÀNCIA DE L'ESTIMACIÓ

Una de les raons de la suavització és la de reduir la influència del soroll sobre la variació de la funció estimada  $\hat{x}$ ; per tant, estem interessats que la variància de l'estimació

$$\text{Var}[\hat{x}(t)] = E\{[\hat{x}(t) - E[\hat{x}(t)]]^2\} \quad (35)$$

sigui la més petita possible o, com a mínim, que no sigui innecessàriament alta.

## 9.3 L'ERROR QUADRÀTIC MITJÀ (EQM)

Es defineix per la fórmula següent:

$$\text{EQM}[\hat{x}(t)] = E\{[\hat{x}(t) - x(t)]^2\} \quad (36)$$

Mitjançant aquesta fórmula esperem assolir, entre d'altres, els mateixos objectius que amb la variància de l'estimació.

## 9.4 RELACIÓ ENTRE BIAIX, VARIÀNCIA I ERROR QUADRÀTIC MITJÀ

Existeix una senzilla relació entre aquestes tres eines, és:

$$\text{EQM}[\hat{x}(t)] = \text{Biaix}^2[\hat{x}(t)] + \text{Var}[\hat{x}(t)] \quad (37)$$

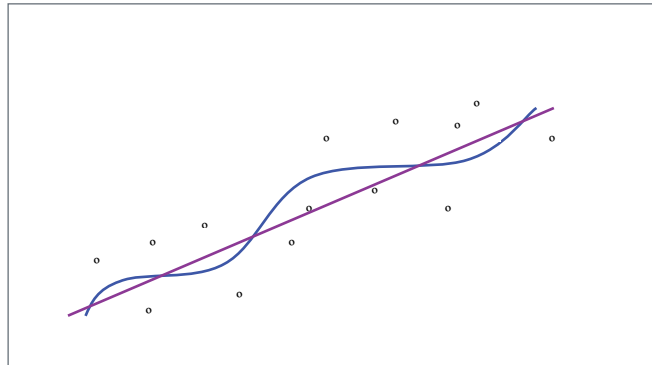
Aquesta relació ens diu que si volem reduir el biaix ha de ser a costa d'incrementar la variància i recíprocament. Ramsay i Silverman<sup>7</sup> han fet una simulació amb 10.000 mostres aleatòries i el principal resultat ha estat: *...la variància mostral s'incrementa ràpidament quan utilitzem un nombre molt (excessivament) gran de funcions bases, però el quadrat del biaix tendeix a disminuir cap al zero al mateix temps.* I en l'exemple pràctic que consideren: *Veiem que els millors resultats de l'error quadràtic mitjà (es refereixen al mínim de l'EQM) s'obté quan utilitzem entre 10 i 12 funcions bases.*

## 9.5 QUANTIFICACIÓ DE LA RUGOSITAT (ROUGHNESS)<sup>8</sup>

Considerem les dades representades amb ° a la figura 8 i dos ajustos: un que segueix bastant la rugositat de les ob-

servacions i una altra estimació que és una línia recta i que només té en compte la tendència i, que per tant, ignora la variabilitat de les dades originals.

Figura 8



En general, la rugositat d'una corba es mesura pel quadrat de la derivada segona i si volem incorporar-lo a l'ajust d'una funció, és necessari que expressem la rugositat en «unitats de funció» en comptes de «unitats de derivada», per aquesta raó hem de calcular la integral, amb la qual cosa, la mesura natural de la rugositat és:

$$\text{PEN}_2(x) = \int [x''(t)]^2 dt \quad (38)$$

On  $\text{PEN}_2(x)$  indica la penalització per curvatura i  $x''(t)$  la derivada segona de la funció.

## 9.6 APLICACIÓ A L'ESTIMACIÓ MQ

En el model  $y = x(t) + \varepsilon$ , els estimadors MQO s'obtenen minimitzant la suma d'errors al quadrat:  $e = |y - x(t)|$ . Aquesta funció es penalitza d'acord amb el valor de (38) multiplicat per un paràmetre de penalització. Llavors la suma penalitzada d'errors al quadrat és:

$$\text{PENMQ}_\lambda = |y - x(t)| + \lambda \cdot \text{PEN}_2(x) \quad (39)$$

El paràmetre  $\lambda$  és conegut amb el nom de paràmetre de penalització<sup>9</sup>:

- Si  $\lambda$  és molt gran, la corba ajustada pot arribar a ser una línia recta, com l'exemple de la figura 8.
- A mesura que el paràmetre  $\lambda$  disminueix, augmenta la rugositat de la corba estimada i s'ajusta millor a les dades originals, però s'incrementa la variabilitat de la suavització.
- El valor atribuït al paràmetre  $\lambda$  depèn del valor de  $\text{PEN}_2(x)$ ; hem de triar doncs entre curvatura de la funció suavitzadora i error de l'estimació.

<sup>7</sup> Obra citada, pàg 68.

<sup>8</sup> En els pocs manuals i articles que hem trobat, sobre tot en castellà, s'ha traduït per corba angulosa. Aquí hem preferit utilitzar la traducció directa de la terminologia anglesa perquè ens sembla que recull més fidelment el que els autors de Boor, Ramsay i Silverman, entre molts d'altres, volen expressar.

<sup>9</sup> L'explicació sobre la funcionalitat del paràmetre lambda es pot trobar a: <http://127.0.0.1:15065/library/fda/html/smooth.basis.html>

Finalment convé tenir en compte que la corba interpoladora no varia arbitràriament ja que és la corba més suau, diferenciable dues vegades, que millor<sup>10</sup> s'ajusta a les dades.

## 10 RESPOSTA A LES IMPLICACIONS DE L'AJUST AMB B-SPLINES

En el treball «*Splines, knots, and penalties*», Paul H.C. Eilers i Brian D. Marx<sup>11</sup> fan un estudi comparatiu entre alguns mètodes de suavització flexibles, entre els quals inclouen el de les bases de les *B-splines*. A continuació en resumim les conclusions i ho fem intentant seguir l'ordre que hem plantejat les implicacions de l'ajust amb *B-splines* a l'epígraf 11:

- El nombre de *B-splines* no té per què ser inferior al nombre d'observacions sempre que els nodes estiguin igualment espaiats. Aquest resultat ja va ser demostrat teòricament per Boor<sup>12</sup>, però no ho va verificar de manera empírica. Els autors de referència, entre d'altres<sup>13</sup>, han demostrat mitjançant la simulació aquesta asseveració. A l'aplicació pràctica ho tindrem en compte i posarem els nodes interiors igualment espaiats. Aquesta distribució del nodes, Ramsay i Silverman l'anomenen *fine*.
- Respecte a l'estimació per **MQO** ja hem comentat a l'epígraf anterior la necessitat de penalitzar-los i, segons demostren els autors de referència, les *B-splines* permeten una elecció flexible del paràmetre de penalització.
- Finalment, volem destacar les propietats «absolutes» següents del mètode de suavització amb *B-splines*:
  - o Tenen propietats numèriques excel·lents.
  - o Permeten informació que es pot visualitzar fàcilment.
  - o Les funcions base de les *B-splines* estan espaiades de manera que ens permeten resoldre bé problemes a gran escala.
  - o L'ordre de les *B-splines* i el nivell de penalització es pot triar de manera independent.

Totes aquestes recomanacions i propietats les farem servir a continuació en l'aplicació pràctica que estem duent a terme.

## 11 FACTORS DE CAPITALITZACIÓ UNITARIS A UN MES

### 11.1 AJUST AMB RESTRICCIÓ DE CREIXEMENT I PENALITZACIÓ

A la taula 4 resumim tota la informació necessària per començar a fer la suavització amb restricció de creixement. Veiem que el nombre de nodes és igual al d'observacions, 133 en total; que l'ordre de les *splines* és 6, amb la qual cosa el grau serà igual a 5. D'aquesta manera ens assegurem la derivabilitat amb continuïtat de la funció d'acceleració.

Tenint en compte la fórmula que hem explicat a l'apartat B.2 de l'apèndix, trobem que el nombre de funcions bases serà de 137; així estem en condicions d'aplicar el que hem exposat a l'epígraf 10 per obtenir una suavització de les dades que les representem juntament a la figura 10: podem veure que la corba estimada és monòtona creixent sense cap mena de rugositat però que, al final, en els darrers nodes es dispara, amb la qual cosa no quedem satisfets amb aquest resultat. A més a més, també en els intervals [1,2,3], [28 a 69] i [106 a 126]. És a dir, en un total de 66 nodes, els valors estimats de la suavització monòtona estan per sobre de les observacions, mentre que en un total de 67 nodes les observacions són més grans que les estimacions. En resum hem aconseguit una suavització creixent però a costa d'un error a la estimació excessivament gran.

Hem fet una altra suavització imposant la condició que la funció estimada sigui monòtona creixent amb una penalització sobre la integral de la derivada segona al quadrat igual a 2 i un paràmetre de suavització de  $\lambda = 10^{-0,5}$ . La representació gràfica que es pot veure a la figura 11 ha millorat una mica el resultat perquè el darrer valor estimat és 1,415774, mentre que el corresponent a l'estimació anterior era 1,434065. De totes maneres encara estem lluny del valor real que és de 1,4075981.

### 11.2 SUAVITZACIÓ AMB PENALITZACIÓ A LA CURVATURA

Hem fet una estimació per mínims quadrats amb una penalització a la derivada segona i un paràmetre de suavització de  $\lambda = 10^{-0,01}$ . Els resultats d'aquesta estimació es poden veure a la figura 12 que els podem considerar satisfactoris, atès que els errors són relativament petits (figura 13) i només comencen a ser grans al voltant dels nodes exteriors, però això és un problema genèric de l'estimació amb polinomis, i les *B-splines* no deixen de ser-ho encara que amb un cert grau de sofisticació.

<sup>10</sup> Ramsay i Silverman diuen "exactament" op. Cit pàg. 85.

<sup>11</sup> Publicat al 2010 amb © de John Wiley & Sons, Inc. WIREs Comp Stat.

<sup>12</sup> De Boor (2001)

<sup>13</sup> Eilers & Marx (2010)

## 12 LA SUAVITZACIÓ AMB NODES EQUIDISTANTS

Un cop s'ha assolit l'objectiu de suavitzar una sèrie de dades discretes, arriba el moment d'interpol·lar. Això es pot fer definint una successió de nodes interiors equidistants, mantenint però els dos nodes exteriors i els corresponents valors de la variable que hem estimat.

Podem triar qualsevol xifra i en aquest cas hem elegit 200 com el nombre total de nodes, la denominació que utilitzen Ramsay i Silverman per definir aquesta successió de nodes equidistants és: *fine*. D'aquesta manera es verifica que s'acompleix l'objectiu principal d'aquest treball: conèixer quins són els factors de capitalització intermedis quan els períodes de capitalització són superiors al dia.

### 12.1 INTERPOLACIÓ DELS FACTORS DE CAPITALITZACIÓ UNITARIS

Utilitzant la mateixa funció de suavització que hem fet servir a 13.2, hem calculat la interpolació elegint un *tempfine* igual a 200 i mantenint els dos nodes i els valors estimats per aquests. La representació gràfica es pot veure a la figura 14.

A la figura 15 s'observa la representació gràfica de la velocitat del creixement dels factors unitaris de capitalització també per a la mateixa successió de nodes. Cal destacar que encara que els valors són petits, són sempre positius; la velocitat de creixement es redueix dràsticament en els dos extrems, sobretot al final del període considerat.

I, finalment a la figura 16 hi ha representada l'acceleració del creixement dels factors de capitalització unitaris. Aquí sí que es veu clarament la reducció de la velocitat quan els tipus d'interès de la reinversió s'han reduït de manera dràstica.

### 13 EXTENSIONS DE LA INTERPOLACIÓ

A més a més, si les suavitzacions es fan sempre amb la funció *smooth monotone* i amb una successió de nodes *fine* per a tots els terminis possibles superiors al dia i amb els mateixos nodes exteriors, es poden fer interpolacions de manera que per als terminis més curts serien extrapolacions, i això ens permetria fer previsions dels factors de capitalització unitaris a una setmana, a un mes, etc., a partir de suavitzacions fetes amb terminis de tres mesos, de sis mesos i fins i tot d'un any si es disposen de sèries una mica llargues.

# TAULES I FIGURES

Taula 1

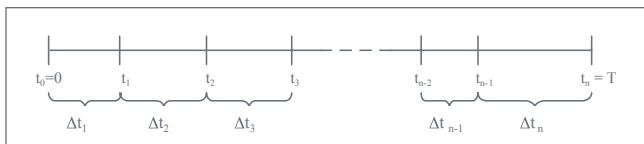
Punts d'inflexió aproximats dels factors de capitalització unitaris a 1 dia durant el primer any.

Dates	Temps	VF a 1DIA	Derivada segona	Forma de la corba
31-12-98	0	1		
01-01-99	0,0027397	1,0000901	0,0005412	CONVEXA
02-01-99	0,0054795	1,0001803	0,0005413	CONVEXA
03-01-99	0,0082192	1,0002704	0,0005413	CONVEXA
04-01-99	0,0109589	1,0003606	-0,0827543	CÒNCAVA
05-01-99	0,0136986	1,0004495	0,0005265	CONVEXA
06-01-99	0,0164384	1,0005385	0,0190400	CONVEXA
07-01-99	0,0191781	1,0006277	0,0005299	CONVEXA
08-01-99	0,0219178	1,0007169	0,0005299	CONVEXA
09-01-99	0,0246575	1,0008061	0,0005300	CONVEXA
10-01-99	0,0273973	1,0008954	0,0005300	CONVEXA
11-01-99	0,0301370	1,0009846	0,0005301	CONVEXA
12-01-99	0,0328767	1,0010739	-0,0179932	CÒNCAVA
13-01-99	0,0356164	1,0011628	-0,0365231	CÒNCAVA
14-01-99	0,0383562	1,0012513	-0,0365329	CÒNCAVA
15-01-99	0,0410959	1,0013392	-0,1106556	CÒNCAVA
16-01-99	0,0438356	1,0014254	0,0004946	CONVEXA
17-01-99	0,0465753	1,0015116	0,0004946	CONVEXA
18-01-99	0,0493151	1,0015979	-0,1477696	CÒNCAVA
19-01-99	0,0520548	1,0016819	-0,0736688	CÒNCAVA
20-01-99	0,0547945	1,0017648	0,0560656	CONVEXA
21-01-99	0,0575342	1,0018486	0,0375419	CONVEXA
22-01-99	0,0602740	1,0019329	0,0746297	CONVEXA
23-01-99	0,0630137	1,0020183	0,0004854	CONVEXA
24-01-99	0,0657534	1,0021038	0,0004854	CONVEXA
25-01-99	0,0684932	1,0021892	0,1302933	CONVEXA
26-01-99	0,0712329	1,0022767	0,1488727	CONVEXA
27-01-99	0,0739726	1,0023663	-0,1663912	CÒNCAVA
28-01-99	0,0767123	1,0024535	-0,0180441	CÒNCAVA
29-01-99	0,0794521	1,0025403	0,0747035	CONVEXA
30-01-99	0,0821918	1,0026283	0,0005145	CONVEXA
31-01-99	0,0849315	1,0027163	0,0005146	CONVEXA

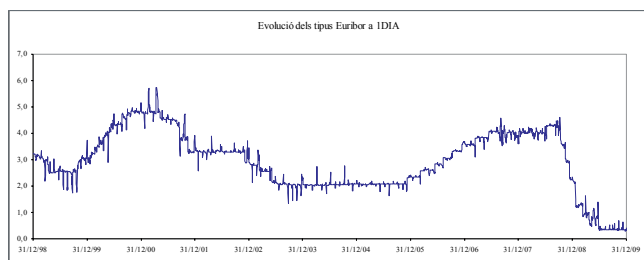
**Taula 2**  
Distribució dels punts d'inflexió durant tot el període d'observació.

Data inicial	Data final	Observacions	Punts d'inflexió	PI / Observacions
01/01/99	07/09/99	250	72	29%
08/09/99	14/05/00	250	80	32%
15/05/00	19/01/01	250	82	33%
20/01/01	26/09/01	250	95	38%
27/09/01	03/06/02	250	74	30%
04/06/02	08/02/03	250	71	28%
09/02/03	16/10/03	250	73	29%
17/10/03	22/06/04	250	65	26%
23/06/04	27/02/05	250	52	21%
28/02/05	04/11/05	250	54	22%
05/11/05	12/07/06	250	48	19%
13/07/06	19/03/07	250	60	24%
20/03/07	24/11/07	250	82	33%
25/11/07	31/07/08	250	87	35%
01/08/08	07/04/09	250	104	42%
08/04/09	13/12/09	250	120	48%
14/12/09	01/01/10	19	7	37%
	<b>TOTALS</b>	<b>4019</b>	<b>1226</b>	<b>31%</b>

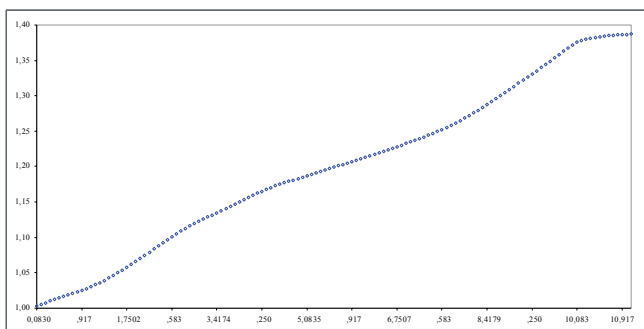
**Figura 1**  
Divisió de l'interval d'integració en subintervalls parcials.



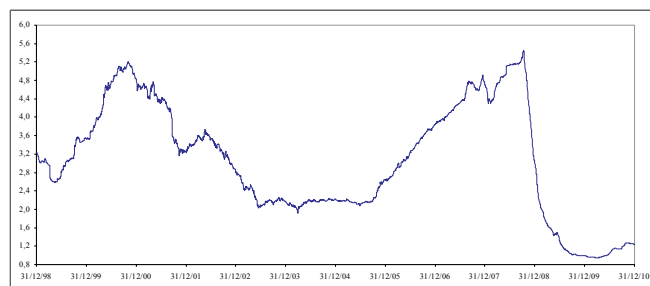
**Figura 2**  
Evolució dels tipus EURIBOR a 1 dia.



**Figura 3**  
Evolució dels factors de capitalització unitaris des de gener de 2001 fins a desembre de 2009. El temps està expressat en fracció d'any.



**Figura 4**  
Tipus EURIBOR a 6 mesos.



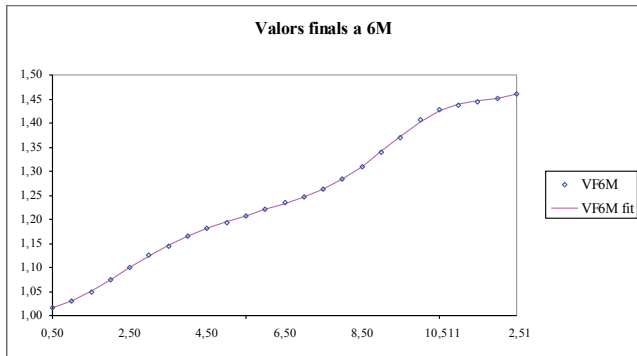
**Taula 3**  
Factors de capitalització unitaris a 6 mesos i l'ajust.

Observacions	Temps	VF6M	VF6M fit
1	0,498630	1,016240	1,016215
2	1,002740	1,030840	1,030063
3	1,501370	1,049180	1,05053
4	2,005479	1,074844	1,075052
5	2,501370	1,100962	1,100152
6	3,005479	1,125570	1,124376
7	3,501370	1,143996	1,145652
8	4,005479	1,164706	1,164369
9	4,501370	1,181103	1,180269
10	5,005479	1,193786	1,194578
11	5,504110	1,206907	1,207649
12	6,008219	1,220471	1,220408
13	6,504110	1,234082	1,233118
14	7,008219	1,247315	1,247163
15	7,504110	1,263852	1,263546
16	8,008219	1,284865	1,284470
17	8,504110	1,309756	1,310212
18	9,008219	1,338642	1,340920
19	9,506849	1,370510	1,372912
20	10,010959	1,406431	1,402397
21	10,506849	1,427645	1,424616
22	11,010959	1,437291	1,438902
23	11,506849	1,444467	1,446614
24	12,010959	1,452138	1,452168
25	12,506849	1,461096	1,460349

Hi ha 25 observacions (nodes); la primera i la darrera corresponen als nodes exteriors, per tant, hi ha 23 nodes interiors. El temps està expressat en anys i fracció d'any. VF6M indica els valors assolits per una unitat monetària invertida el 31 de desembre de 1998 i la darrera xifra el valor que s'assolirà el 30 de juny de 2011. A la darrera columna hi ha els valors finals estimats a les mateixes dates.

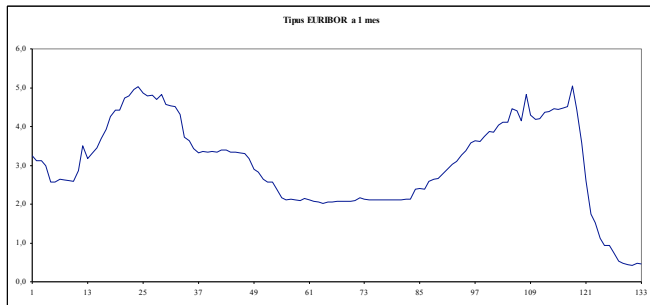
**Figura 5**

Representació de les xifres indicades a la taula 3. Els valors ajustats formen una corba contínua perquè així està especificat en les bases de les *B-splines*.



**Figura 6**

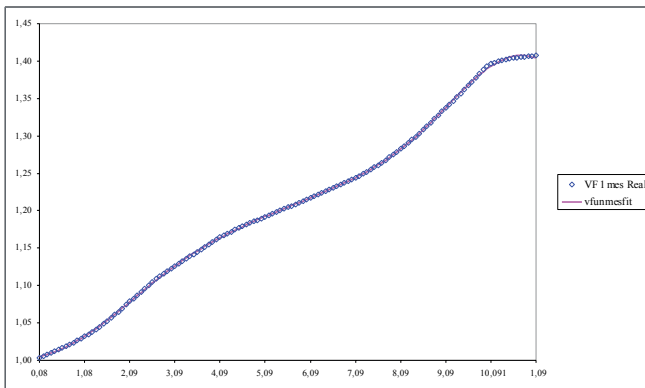
Tipus EURIBOR a 1 mes.



**Figura 7**

Valors finals reals calculats amb l'EURIBOR a 1MES i valors finals a 1MES estimats sense restriccions.

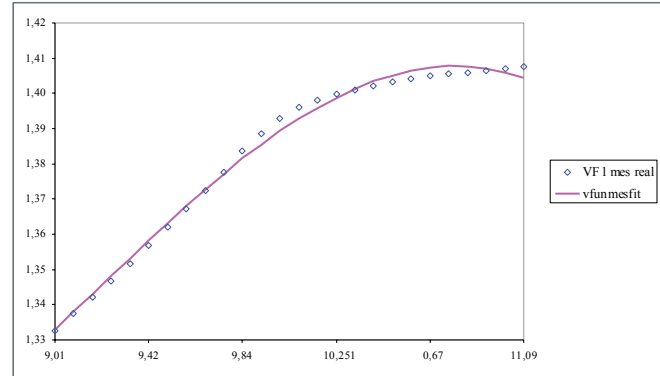
Es pot observar com al final del període la corba comença a tenir pendent negatiu, fet que es contradiu amb la teoria perquè els tipus, encara que petits, són sempre positius. A la figura 8 hem representat només els darrers valors i es pot veure en més claredat el màxim i l'error comés a l'estimació.



**Figura 8**

Darreres 26 observacions i els valors ajustats.

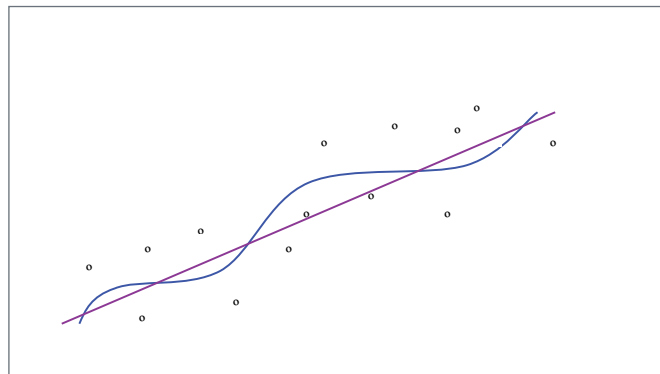
Valors finals absoluts observats mensualment amb tipus EURIBOR a 1MES a partir del novè any i l'estimació amb funcions *spline* sense restriccions; es pot veure com a mesura que ens acostem al node exterior (extrem per la dreta) els valors estimats es «disparen» i s'allunyen de les dades.



**Figura 9**

Observacions discretes, ajust amb variabilitat alta i ajust sense rugositat.

Els punts representats per  $\circ$  indiquen les observacions, la corba en blau un ajust amb poca penalització per rugositat i la línia morada un ajust amb una penalització molt alta.





**Taula4**

Nodes, ordre de les *splines*, nombre de funcions bases, creació de les *B-splines*, nodes interiors

```
> knots <- dadesvfunmes$temp
> knots
[1] 0.08493 0.16164 0.24658 0.32877 0.41370 0.49589 0.58082 0.66575
[9] 0.74795 0.83288 0.91507 1.00000 1.08493 1.16438 1.24932 1.33151
[17] 1.41644 1.49863 1.58356 1.66849 1.75068 1.83562 1.91781 2.00274
[25] 2.08767 2.16438 2.24932 2.33151 2.41644 2.49863 2.58356 2.66849
[33] 2.75068 2.83562 2.91781 3.00274 3.08767 3.16438 3.24932 3.33151
[41] 3.41644 3.49863 3.58356 3.66849 3.75068 3.83562 3.91781 4.00274
[49] 4.08767 4.16438 4.24932 4.33151 4.41644 4.49863 4.58356 4.66849
[57] 4.75068 4.83562 4.91781 5.00274 5.08767 5.16712 5.25205 5.33425
[65] 5.41918 5.50137 5.58630 5.67123 5.75342 5.83836 5.92055 6.00548
[73] 6.09041 6.16712 6.25205 6.33425 6.41918 6.50137 6.58630 6.67123
[81] 6.75342 6.83836 6.92055 7.00548 7.09041 7.16712 7.25205 7.33425
[89] 7.41918 7.50137 7.58630 7.67123 7.75342 7.83836 7.92055 8.00548
[97] 8.09041 8.16712 8.25205 8.33425 8.41918 8.50137 8.58630 8.67123
[105] 8.75342 8.83836 8.92055 9.00548 9.09041 9.16986 9.25479 9.33699
[113] 9.42192 9.50411 9.58904 9.67397 9.75616 9.84110 9.92329 10.00822
[121] 10.09315 10.16986 10.25479 10.33699 10.42192 10.50411 10.58904
10.67397
[129] 10.75616 10.84110 10.92329 11.00822 11.09315

> norder <- 6
> norder
[1] 6

> nbasis <- length(knots) + norder - 2
> nbasis
[1] 137
```

**Taula4**

continuació

```
> vfbasis <- create.bspline.basis(range(knots), nbasis, norder, knots)
> vfbasis
```

Basis object:

Type: bspline

Range: 0.08493 to 11.09315

Number of basis functions: 137

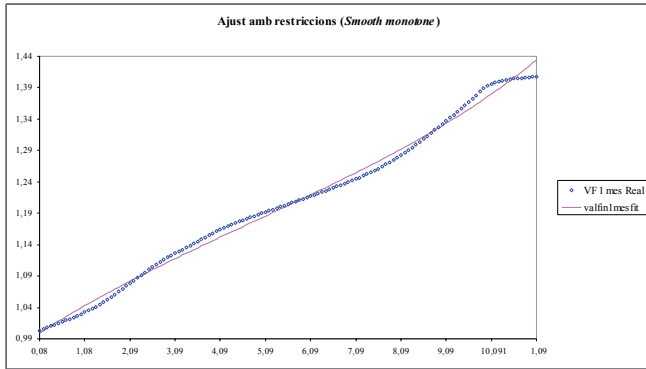
Order of spline: 6

[1] " Interior knots"

```
[1] 0.16164 0.24658 0.32877 0.41370 0.49589 0.58082 0.66575 0.74795
[9] 0.83288 0.91507 1.00000 1.08493 1.16438 1.24932 1.33151 1.41644
[17] 1.49863 1.58356 1.66849 1.75068 1.83562 1.91781 2.00274 2.08767
[25] 2.16438 2.24932 2.33151 2.41644 2.49863 2.58356 2.66849 2.75068
[33] 2.83562 2.91781 3.00274 3.08767 3.16438 3.24932 3.33151 3.41644
[41] 3.49863 3.58356 3.66849 3.75068 3.83562 3.91781 4.00274 4.08767
[49] 4.16438 4.24932 4.33151 4.41644 4.49863 4.58356 4.66849 4.75068
[57] 4.83562 4.91781 5.00274 5.08767 5.16712 5.25205 5.33425 5.41918
[65] 5.50137 5.58630 5.67123 5.75342 5.83836 5.92055 6.00548 6.09041
[73] 6.16712 6.25205 6.33425 6.41918 6.50137 6.58630 6.67123 6.75342
[81] 6.83836 6.92055 7.00548 7.09041 7.16712 7.25205 7.33425 7.41918
[89] 7.50137 7.58630 7.67123 7.75342 7.83836 7.92055 8.00548 8.09041
[97] 8.16712 8.25205 8.33425 8.41918 8.50137 8.58630 8.67123 8.75342
[105] 8.83836 8.92055 9.00548 9.09041 9.16986 9.25479 9.33699 9.42192
[113] 9.50411 9.58904 9.67397 9.75616 9.84110 9.92329 10.00822
10.09315
[121] 10.16986 10.25479 10.33699 10.42192 10.50411 10.58904 10.67397
10.75616
[129] 10.84110 10.92329 11.00822
```

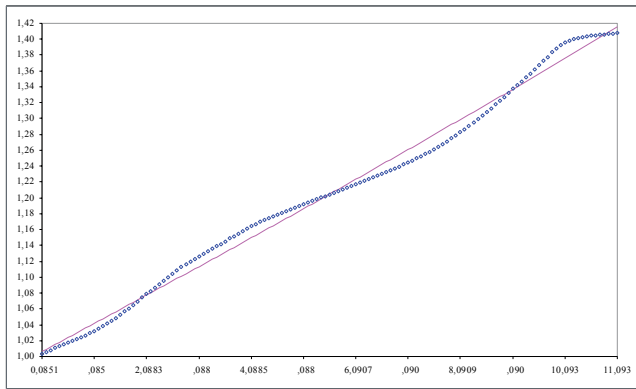
**Figura 10**

Suavitzió dels factors de capitalització unitaris a 1MES amb la restricció de creixement absolut i sense penalització per variabilitat.



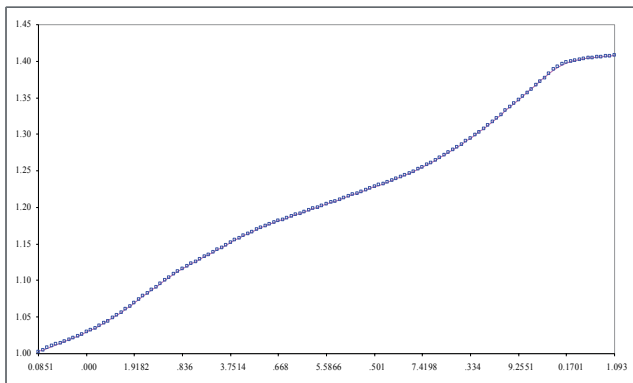
**Figura 11**

Suavitzió dels factors de capitalització unitaris a 1MES amb la restricció de creixement absolut, amb un factor de penalització igual a dos i un paràmetre de suavitzió  $\lambda = 10^{-0,5}$ .



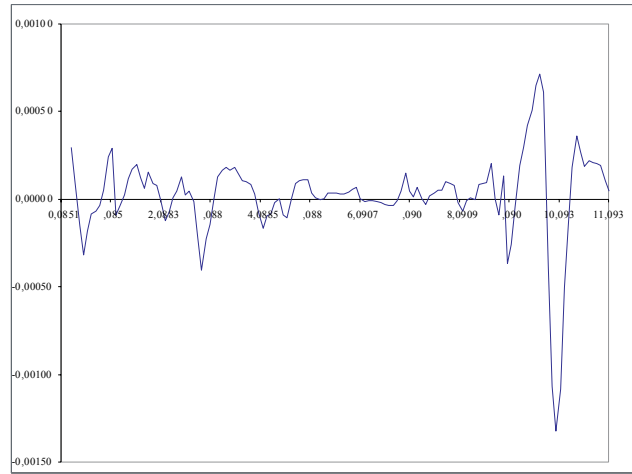
**Figura 12**

Valors reals observats i valors estimats dels factors de capitalització unitaris. La suavitzió s'ha fet sense restriccions de creixement però amb penalització a la derivada segona amb un paràmetre de penalització  $\lambda = 10^{-0,01}$ .



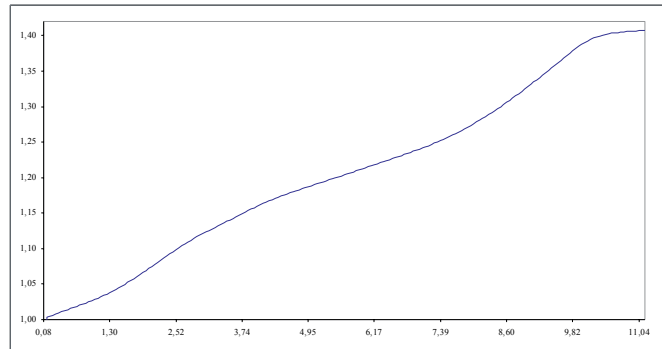
**Figura 13**

Error de l'estimació; encara que al tram final es disparen no arriba a ser més de l'1,5 per mil.



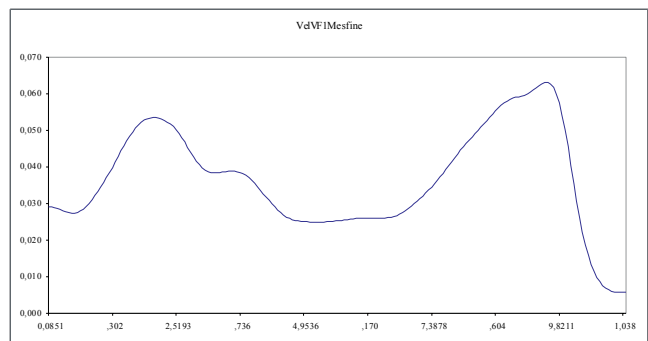
**Figura 14**

Suavitzió *fine* amb 200 nodes mantenint els dos nodes exteriors i els seus corresponents valors estimats.



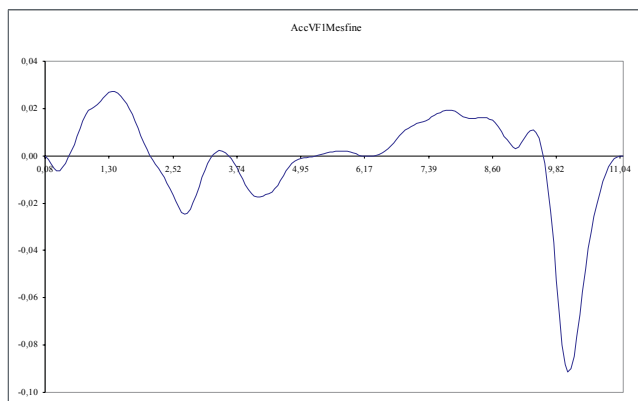
**Figura 15**

Velocitat del creixement dels factors unitaris de capitalització a 1 mes calculats amb la primera derivada de la funció suavitadora que hem representat a la figura 14.



**Figura 16**

Acceleració del creixement dels factors de capitalització unitaris, calculats com la segona derivada de les *B-splines* que donen lloc a la funció suavitzadora de la figura 14.



## APÈNDIX

### INTRODUCCIÓ

Un dels objectius que ens hem plantejat és fer una interpolació quan els períodes de capitalització són superiors a 1DIA, de forma que això ens permeti comparar de manera fiable valors capitalitzats a diferents períodes i amb diferents tipus.

Expliquem els mètodes d'interpolació en un apèndix<sup>14</sup> per no interrompre el fil conductor que ens ha dut fins a l'estudi del creixement del valor final d'un capital mitjançant l'anàlisi de dades funcionals (FDA) Acabem aquest apèndix amb el mètode d'estimació, utilitzant una funció *B-spline* i deixem la resta de detalls de l'estimació per al text principal.

La paraula *spline* no té traducció i la definició que es troba a Optimot<sup>15</sup> és: **funció polinòmica a trossos que interpola una sèrie de nodes, de manera que cada tros és un polinomi de grau  $n$  i en cada node els dos polinomis concurrents tenen totes les seves derivades iguals fins a l'ordre  $n - 1$ .**

#### A.1. EXEMPLE D'APROXIMACIÓ MITJANÇANT SPLINES

Volem aproximar la corba de Gauss des de -2 fins a +2 mitjançant polinomis. El primer que hem de fer és dividir l'interval amb subinterval d'igual dimensió, en aquest cas considerarem quatre subinterval definits de la manera següent:

$$(-2, -1] \quad (-1, 0] \quad (0, 1] \quad (1, 2)$$

Comencem l'aproximació amb segments de recta, és a dir,

amb polinomis d'ordre<sup>16</sup> 2 i, per tant, de grau 1; convé recordar que l'ordre d'un polinomi és el nombre de paràmetres que s'han de triar per definir el polinomi mentre que el grau es refereix a la màxima potència de la variable del polinomi.

A la primera gràfica de la figura A1 podem veure l'aproximació mitjançant segments de recta, que vénen donats per les equacions següents:

$$x(t) = \frac{1}{6}t + \frac{1}{3} \quad \text{per a } -2 < t \leq -1$$

$$x(t) = \frac{1}{2}t + \frac{2}{3} \quad \text{per a } -1 < t \leq 0$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{2}{3} \quad \text{per a } 0 < t \leq 1$$

$$x(t) = -\frac{1}{6}t + \frac{1}{3} \quad \text{per a } 1 < t < 2$$

$$x(t) = 0 \quad \text{per a qualsevol altre valor}$$

(A1)

Si ara ajustem un polinomi de grau 3, obtindríem amb les equacions següents:

$$x(t) = \frac{1}{6} \times (2+t)^2 \quad \text{per a } -2 < t \leq -1$$

$$x(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \times t^2 \quad \text{per a } -1 < t \leq 0$$

$$x(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \times t^2 \quad \text{per a } 0 < t \leq 1$$

$$x(t) = \frac{1}{6} \times (2-t)^2 \quad \text{per a } 1 < t < 2$$

$$x(t) = 0 \quad \text{per a qualsevol altre valor}$$

(A2)

La gràfica representada a la figura A2 s'ajusta una mica més a la campana de Gauss, si bé encara no hem aconseguit una representació gaire afinada.

Ara ajustem un polinomi d'ordre 4 o de grau 3 definit per les equacions següents:

$$x(t) = \frac{1}{6} \times (2+t)^3 \quad \text{per a } -2 < t \leq -1$$

$$x(t) = \frac{1}{6} \times (4-6t^2-3t^3) \quad \text{per a } -1 < t \leq 0$$

$$x(t) = \frac{1}{6} \times (4-6t^2+3t^3) \quad \text{per a } 0 < t \leq 1$$

$$x(t) = \frac{1}{6} \times (2-t)^3 \quad \text{per a } 1 < t < 2$$

$$x(t) = 0 \quad \text{per a qualsevol altre valor}$$

(A3)

<sup>14</sup> Es pot prescindir de la lectura d'aquest apèndix si el lector és coneixedor del tema que tractem aquí.

<sup>15</sup> Optimot és un servei de diccionari, traducció, etc. de la Generalitat de Catalunya.

<sup>16</sup> És convenient treballar amb l'ordre del polinomi en comptes del grau, perquè el conjunt de tots els polinomis de grau  $n-1$  no és un espai lineal, mentre que sí ho és el conjunt de tots els polinomis d'ordre  $n$ . També cal recordar que un polinomi d'ordre  $n$  té  $n$  graus de llibertat. (De Boor, 2001, pàg. 1).

Ara sí que hem aconseguit una representació gràfica bastant aproximada de la campana de Gauss (figura A3).

## A.2 NODES I GRAUS DE LLIBERTAT

En general, el primer pas d'un ajust per *splines* consisteix a dividir l'interval  $(t_0, t_n)$  en  $L$  subintervalls mitjançant els punts equidistants o no  $(\tau_l; l = 1, 2, \dots, L-1)$ ; amb això els intervals són:  $(t_0 = \tau_0, \tau_1], (\tau_1, \tau_2], \dots, (\tau_{L-1}, \tau_L = t_n)$ .

En exemples construïts per il·lustrar el que es demostra, es prenen els intervals iguals i no tenim cap problema, però quan es tracta d'observacions que s'han obtingut en intervals desiguals, és quan es demostra la fiabilitat de l'anàlisi funcional de dades que ens permet fer **particions uniformes** o com diu de Boor (2001) *good meshes*.<sup>17</sup>

Els dos extrems de l'interval total i tots els punts utilitzats per definir els intervals es designen amb el nom de **nodes**<sup>18</sup>;  $t_0$  i  $t_n$  són els **nodes exteriors** i els que hem utilitzat per definir els intervals són **nodes interiors**.

A l'exemple de la campana de Gauss, el nombre total de nodes és  $L = 5$  dels quals dos són exteriors: -2 i 2, i la resta són nodes interiors: -1, 0 i 1.

La gràfica A1 correspon a polinomis ajustats d'ordre 2 i grau 1: són segments de línies rectes; la gràfica A2 és una representació gràfica de polinomis ajustats d'ordre 3 i de grau 2. En realitat són segments de paràboles de segon grau. Finalment, la figura A3 correspon a la representació gràfica de polinomis ajustats d'ordre 4 i grau igual a 3, són segments de paràboles cúbiques. És evident doncs, que a mesura que incrementem l'ordre (i conseqüentment el grau) dels polinomis, s'augmenta la bondat de l'ajust.

Per definir un segment de línia recta tenim dos graus de llibertat, tants com l'ordre del polinomi,  $i$ , per tant, amb els quatre segments de línia recta disposem de 8 graus de llibertat (4 rectes per a 2 coeficients), però com que volem que l'*spline* resultant sigui continu en perdem 3, un per cada vèrtex, això ens dóna un total de 5 graus de llibertat.

En el cas de l'*spline* d'ordre 3, disposem de 3 graus de llibertat per a cadascun dels quatre polinomis, això dóna un total de 12 (3 per a 4 polinomis), però en aquest cas l'*spline* és continu i derivable en cadascun dels 3 vèrtex, és a dir, que en perdem 3 per continuïtat i 3 per derivabilitat, en

total 6, que restats dels 12 que teníem dóna un net de 6 graus de llibertat.

Amb el mateix càlcul, a l'*spline* d'ordre quatre, tenim 4 graus de llibertat per quatre polinomis que dóna un total de 16, perdent 3 en continuïtat, 3 en la derivada primera i 3 en la derivada segona, això dóna un total de 9, que restats dels 16 inicials resulta un net de 7 graus de llibertat. La taula A1 resumeix els càlculs:

18

<sup>17</sup> A les aplicacions pràctiques, la primera estimació, la farem amb les observacions tal com vénen; per a la interpolació utilitzarem intervals iguals.

<sup>18</sup> Estrictament parlant hauríem de dir punts de ruptura o punts de control; de totes maneres si els nodes no són coincidents com passa en totes les aplicacions pràctiques que fem aquí és correcte utilitzar aquesta terminologia (Ramsay & Silverman (pàg. 48 i 49).

Taula A1

Ordre	Número de polinomis	Classe 0	Classe 1	Classe 2	Graus de llibertat nets
2	4	3	-	-	$(2 \times 4) - 3 = 5$
3	4	3	3	-	$(3 \times 4) - 3 - 3 = 6$
4	4	3	3	3	$(4 \times 4) - 3 - 3 - 3 = 7$

Una altra manera de comptar els graus de llibertat romants consisteix a sumar a l'ordre el nombre de nodes interiors, resulta:

Taula A2

Ordre del polinomi	Nodes interiors	Graus de llibertat
2	3	$2 + 3 = 5$
3	3	$3 + 3 = 6$
4	3	$4 + 3 = 7$

Veiem que quan incrementem l'ordre obtenim una millor aproximació, de manera que per a l'ordre 4 l'aproximació és tan bona que fins i tot les derivades de segon ordre són contínues, tal com es pot comprovar a la tercera de les gràfiques i a partir dels valors que prenen les derivades segones en els nodes interiors:

Taula A3

Derivades segones	Nodes interiors	Valors a l'esquerra	Valors a la dreta
$x''(t) = 2 + t$	-1	--	$x''(-1) = 1$
$x''(t) = -2 - 3t$	-1	$x''(-1) = 1$	--
$x''(t) = -2 - 3t$	0	--	$x''(0) = -2$
$x''(t) = -2 + 3t$	0	$x''(0) = -2$	--
$x''(t) = -2 + 3t$	1	--	$x''(1) = 1$
$x''(t) = 2 - t$	1	$x''(1) = 1$	--

19

Queda clar que per aconseguir *splines* més flexibles no tenim altra opció que:

- I. incrementar l'ordre dels segments polinòmics i/o
- II. incrementar el nombre de nodes no coincidents.

Respecte a la primera de les dues possibilitats ja sabem la complexitat de càlcul quan utilitzem polinomis d'ordre cinquè i superior.

Respecte a la segona només cal dir que si disposem de  $N$  dades, que poden ser centenars o milers d'observacions, i a cadascuna li assignem un node interior, tindriem  $N-2$  nodes interiors. Hem de cercar, doncs, un mètode que simplifiqui el nombre d'operacions i que sigui flexible.

**EXEMPLE A.2**

Ens proporcionen les dades següents de valoració d'una inversió en moments equidistants de temps:  $C(t_0) = 100$ ;  $C(t_1) = 103$ ;  $C(t_2) = 107$ ;  $C(t_3) = 108$ .

Volem fer una interpolació polinòmica utilitzant la fórmula de Newton:

$$p_n(t) = a_1 + a_2(t-t_0) + a_3(t-t_0)(t-t_1) + \dots + a_n(t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_{n-1}) \quad (\text{A4})$$

L'ordre d'aquest polinomi és  $n$  i, per tant, el seu grau és:  $n-1$ .

En el cas de l'exemple, el polinomi serà d'ordre 4 perquè disposem de quatre dades. Així, el sistema d'equacions que formarem per resoldre'l respecte a les incògnites serà compatible i determinat. El polinomi, és:

$$p_4(t) = a_1 + a_2[t-t_0] + a_3[t-t_0][t-t_1] + a_4[t-t_0][t-t_1][t-t_2]$$

Atès que els intervals de temps són iguals, els podríem prendre com unitat de mesura:  $t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = 1$ , i, per tant, tindriem que  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $t_3 = 3$ .

Substituint successivament l'equació (A4), obtenim els valors següents per als paràmetres  $a_1, a_2, a_3$  i  $a_4$ :

$$p_4(0) \equiv C(0) \equiv a_1 = 100$$

$$p_4(1) \equiv C(1) \equiv 103 = 100 + a_2(1-0) \Rightarrow a_2 = 3$$

$$p_4(2) \equiv C(2) \equiv 107 = 100 + 3 \times (2-0) + a_3 \times (2-0) \times (2-1) \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}$$

$$p_4(3) \equiv C(3) \equiv 108 = 100 + 3 \times 3 + \frac{1}{2} \times 3 \times (3-1) + a_4 \times 3 \times (3-1) \times (3-2) \Rightarrow a_4 = -\frac{2}{3}$$

El polinomi que cerquem és:

$$p_4(t) \equiv C(t) \equiv 100 + 3t + \frac{1}{2}t(t-1) - \frac{2}{3}t(t-1)(t-2)$$

O, bé:

$$C(t) = 100 + \frac{7}{6}t + \frac{5}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3$$

**A.3 GENERALITZACIÓ:****LA FÓRMULA D'INTERPOLACIÓ DE NEWTON<sup>19</sup>**

El polinomi interpolador de Newton es pot generalitzar fàcilment per a qualsevol conjunt de punts i ordre del polinomi.

Així si volem aproximar la funció  $f(x)$  mitjançant un polinomi d'ordre  $n$ , escriurem l'expressió:

$$p_n(x) = a_1 + a_2(x-x_0) + a_3(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-2}) \quad (\text{A5})$$

Atès que el polinomi és d'ordre  $n$ , el grau del polinomi que correspondrà a la potència més gran serà  $n-1$ .

Designant per a  $f_0 = f(x_0), f_1 = f(x_1), \dots, f_k = f(x_k), \dots$ , els punts de la funció  $f(x)$  pels quals ha de passar el polinomi  $p_n(x)$ , els coeficients  $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$  es poden trobar fàcilment, tal com podem veure a continuació.

Si disposem d'una única observació  $f_{0r}$  el polinomi és d'ordre 1 (grau 0), queda reduït a una constant que podem trobar substituint  $x$  per  $f_0$  a l'expressió (A2), i resulta:

$$p_1(x_0) = a_1 = f_0 \quad (\text{A6})$$

Si disposem de dos punts  $f_0$  i  $f_1$ , el polinomi és d'ordre 2 (o grau: 1):

$$p_2(x) = a_1 + a_2(x-x_0)$$

Tenint en compte que coneixem  $p_1(x_0) = a_1 = f_0$ , queda:

$$p_2(x_1) = a_1 + a_2(x_1-x_0) \Rightarrow a_2 = \frac{p_2(x_1) - a_1}{x_1 - x_0} = \frac{p_2(x_1) - p_1(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \quad (\text{A7})$$

Podem establir la llei de recurrència per a un polinomi d'ordre 2:

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x-x_0)$$

També per a un polinomi d'ordre 3:

$$p_3(x) = p_2(x) + a_3(x-x_0)(x-x_1) = p_2(x) + a_3 \prod_{j=0}^1 (x-x_j)$$

I, per a qualsevol polinomi d'ordre  $k$ :

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + a_k(x-x_0)\dots(x-x_{k-2}) = p_{k-1}(x) + a_k \prod_{j=0}^{k-2} (x-x_j) \quad (\text{A8})$$

Per trobar el valor del coeficient  $a_k$  del darrer polinomi (A8) hem de substituir  $x$  per  $x_{k-1}$  i resulta:

$$p_k(x_{k-1}) = p_{k-1}(x_{k-1}) + a_k \prod_{j=0}^{k-2} (x_{k-1} - x_j) \quad (\text{A9})$$

Aïllant  $a_k$  i tenint en compte que  $p_k(x_{k-1}) = f_{k-1}$ :

$$a_k = \frac{f_{k-1} - p_{k-1}(x_{k-1})}{\prod_{j=0}^{k-2} (x_{k-1} - x_j)} \quad (\text{A10})$$

<sup>19</sup> Es pot consultar: Conde, C., Hidalgo, A. i López, A. 2007 "Interpolación polinómica", Universidad Politécnica de Madrid.



### A.3.1 PROPIETATS

- En els càlculs successius dels coeficients del polinomi hem vist que  $a_k$  depèn de tots els punts  $x: x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  per aquesta raó es pot dir que  $a_k$  és una funció dels punts<sup>20</sup> anteriors al  $x_k$  que pren la variable independent  $x$ .
- Els valors dels paràmetres  $a_1, \dots, a_k$  depenen dels arguments  $x: x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  però no depenen de l'ordre en què s'hagin pres perquè el polinomi interpolador depèn només de les dades i no de l'ordre<sup>21</sup>.
- Si hi afegim una observació  $x_k$ , tots els càlculs precedents ens serveixen i tenim que el coeficient de la potència afegida al polinomi és:

$$a_{k+1} = \frac{f_k - p_k(x_k)}{\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)} \quad (\text{A8})$$

### A.3.2 CONTINUACIÓ EXEMPLE A3

A l'exemple del capital ens proporcionen la nova observació:  $C(4) = 112$ ; per poder aplicar la fórmula (A8), hem de calcular el valor del polinomi  $p_k(x_k)$ , amb  $k = 4$  i  $x_4 = 4$ , s'obté:

$$p_4(4) = 100 + 3 \times 4 + \frac{1}{2} 4(4-1) - \frac{2}{3} 4(4-1)(4-2) = 102$$

Substituint a (B10) i tenint en compte que  $f_4 = C(4) = 112$ , resulta:

$$a_5 = \frac{f_4 - p_4(x_4)}{\prod_{j=0}^3 (4 - x_j)} = \frac{112 - 102}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{5}{12}$$

I, el polinomi d'ordre 5 que aproxima la funció  $C(t)$ , és:

$$p_5(t) \equiv C(t) = 100 + 3t + \frac{1}{2}t(t-1) - \frac{2}{3}t(t-1)(t-2) + \frac{5}{12}t(t-1)(t-2)(t-3)$$

### A.4 DIFERÈNCIES DIVIDIDES I EL POLINOMI DE NEWTON

Donada una funció  $f(x)$  avaluada exclusivament en els punts discrets:

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{n-2}, x_{n-1},$$

en els quals prenen els valors:

$$f_0 = f(x_0), f_1 = f(x_1), f_2 = f(x_2), \dots, f_i = f(x_i), \dots, f_{n-2} = f(x_{n-2}), f_{n-1} = f(x_{n-1})$$

ens demanen que calculem el polinomi interpolador de Newton:

$$p_n(x) = a_1 + a_2(x - x_0) + a_3(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-2})$$

Els coeficients es calculen aplicant les fórmules que ja hem deduït abans i que són:

$$p_1(x_0) = a_1 = f(x_0)$$

$$a_2 = \frac{p_2(x_1) - p_1(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (\text{A11})$$

Però, atès que  $p_2(x_1)$  és una funció de  $x_0$  i de  $x_1$ , podem substituir-ho per  $p_2(x_1) = f(x_0, x_1)$ <sup>22</sup>; llavors tenim:

$$a_2 = \frac{p_2(x_1) - p_1(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0, x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (\text{A12})$$

Per  $a_3$ :

$$a_3 = \frac{p_3(x_2) - p_2(x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f(x_0, x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad (\text{A13})$$

I, en general, segons (A7):

$$a_k = \frac{f_{k-1} - p_{k-1}(x_{k-2})}{\prod_{j=0}^{k-2} (x_{k-1} - x_j)} = \frac{f(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) - f(x_0, x_1, \dots, x_{k-2})}{\prod_{j=0}^{k-2} (x_{k-1} - x_j)} \quad (\text{A14})$$

Respecte al que acabem de fer, hem d'assenyalar el següent:

- A les fórmules de (A12) a (A14) hem substituït el valor del polinomi d'ordre  $k$ :  $p_k(x_{k-1})$  per l'expressió més explícita  $f(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1})$  i el del polinomi d'ordre  $k-1$ :  $p_{k-1}(x_{k-1})$  per:  $f(x_0, x_1, \dots, x_{k-2})$ , per tal de posar de manifest els paràmetres que intervenen en el càlcul dels coeficients del polinomi interpolador.

### A.5 DEFINICIÓ DE DIFERÈNCIA DIVIDIDA

Es diu diferència dividida (*d.d.*) d'ordre  $k$  de la funció  $f(x)$  avaluada exclusivament en els  $k$  punts discrets  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}$ , a l'expressió:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}) - f(x_0, x_1, \dots, x_{k-2})}{(x_{k-1} - x_0)} \quad (\text{A15})$$

Les diferències dividides (*d.d.*) de primer ordre són:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}, \dots, f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}, \dots, f(x_{i+1}, x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})}, \dots \quad (\text{A16})$$

<sup>20</sup> De Boor (2001) en diu sites; Ramsay i Silverman (2005), breakpoints; Conde, Hidalgo i López (2007) i Paluszny, Prautzsch i Boehm (2002), punts de control.

<sup>21</sup> La demostració es pot veure a de Boor pàg. 4.

<sup>22</sup> Quan escrivim  $p_2(x_1) = f(x_0, x_1)$  volem indicar que el polinomi d'ordre 2 és una funció discreta, avaluada exclusivament en els punts  $x_0$  i  $x_1$ . Val també per a tota la resta de polinomis.

Mentre que les *d.d.* de segon ordre s'obtenen de l'expressió:

$$f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}, x_i) - f(x_i, x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})} \text{ des d}'i \text{ igual a } 1 \text{ fins a } (k-1) \quad (\text{A17})$$

A la taula A5 hem desenvolupat les *d.d.* d'una funció d'ordre  $n$ . Com podem veure només s'obté una diferència dividida d'ordre  $n-1$ , per tant, totes les *d.d.* d'ordre posterior són iguals a zero.

### A.5.1 CONSEQÜÈNCIES DE LA DEFINICIÓ:

Veiem que a la primera fila de la taula hi ha calculats els coeficients del polinomi interpolador de Newton, que ara quedaria escrit de la manera següent:

$$p_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})(x - x_0) \dots (x - x_{n-2})$$

essent:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}) - f(x_0, \dots, x_{k-2})}{x_{k-1} - x_0} = a_k \quad \text{per } \forall k = 0, 1, \dots, n \quad (\text{A18})$$

### EXEMPLE A.4

Si apliquem el concepte *d.d.* a l'exemple de la interpolació d'un polinomi al valor final d'un capital, veiem que a la primera fila de la taula A4 apareixen tots els coeficients del polinomi que hem pogut calcular d'una manera molt senzilla.

### A.6 LA FORMA DE LA CORBA I LES DIFERÈNCIES DIVIDIDES D'UNA FUNCIO

Quan hem volgut saber la forma de la corba de creixement del valor final d'un capital, hem utilitzat una expressió aproximada, que ens proporciona la concavitat o convexitat d'una funció en un interval de temps; la fórmula és:

$$C''(t_i) \approx \frac{\frac{C(t_{i+1}) - C(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \frac{C(t_i) - C(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (\text{A19})$$

Tenint en compte que  $\frac{C(t_i) - C(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$  i  $\frac{C(t_{i+1}) - C(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$

són les *d.d.* primeres de la funció  $C(t_i)$ , ( $i = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n-2$ ), les podem substituir per les expressions (A16), i resulta:

$$C''(t_i) \approx \frac{C(t_{i+1}, t_i) - C(t_i, t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (\text{A20})$$

Fórmula que correspon a l'expressió general de les diferències dividides de segon ordre de la funció  $C(t)$ .

A mesura que incrementem l'ordre de les *d.d.* augmenta el grau del polinomi interpolador  $i$ , en conseqüència, mi-

llora la qualitat de l'ajust a la funció desitjada. Com que es pot disposar d'un algorisme de càlcul senzill i de fàcil implementació informàtica, aquesta tasca queda parcialment resolta; només ens falta poder triar els *splines* d'una manera directa i segura.

### A.7 DIFERÈNCIES DIVIDIDES DEL MONOMI $(t-x)^{k-1}$

Prenent com a funció el monomi  $(t-x)^{k-1}$ , calculem les diferències dividides fins a l'ordre  $k$  per a la successió monòtona creixent de nodes de  $t$ :  $(t_j, t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_{j+k-1}, t_{j+k})$ , les diferències primeres són:

$$\begin{aligned} \frac{(t_{j+1} - x)^{k-1} - (t_j - x)^{k-1}}{t_{j+1} - t_j} &= f(t_j, t_{j+1}) \\ \frac{(t_{j+2} - x)^{k-1} - (t_{j+1} - x)^{k-1}}{t_{j+2} - t_{j+1}} &= f(t_{j+1}, t_{j+2}) \\ &\vdots \\ \frac{(t_{j+k-1} - x)^{k-1} - (t_{j+k-2} - x)^{k-1}}{t_{j+k-1} - t_{j+k-2}} &= f(t_{j+k-2}, t_{j+k-1}) \\ \frac{(t_{j+k} - x)^{k-1} - (t_{j+k-1} - x)^{k-1}}{t_{j+k} - t_{j+k-1}} &= f(t_{j+k-1}, t_{j+k}) \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

Les diferències dividides de segon ordre són:

$$\begin{aligned} \frac{f(t_{j+1}, t_{j+2}) - f(t_j, t_{j+1})}{t_{j+2} - t_j} \\ \vdots \\ \frac{f(t_{j+k-1}, t_{j+k}) - f(t_{j+k-2}, t_{j+k-1})}{t_{j+k} - t_{j+k-2}} \end{aligned} \quad (\text{A22})$$

Finalment, l'única diferència dividida d'ordre  $k$  és:

$$\frac{f(t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_{j+k}) - f(t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+k-1})}{t_{j+k} - t_j} \quad (\text{A23})$$

### A.8 DEFINICIÓ DE B-SPLINE

- Es defineix la  $j$ -èsima *B-spline* d'ordre  $k$  per a la successió monòtona creixent de nodes de  $t$ :  $(t_j, t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_{j+k-1}, t_{j+k})$  mitjançant la fórmula:

$$B_{j,k,t}(x) = (t_{j+k} - t_j) \cdot [f(t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_{j+k}) - f(t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+k-1})] \quad (\text{A19})$$

- On  $[f(t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_{j+k}) - f(t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+k-1})]$  és el numerador de (A18), que és la diferència dividida d'ordre  $k$  de la funció.
- Fora de la successió que defineix  $t$ , el valor de la *B-spline* és zero.

Aquesta és la definició d'una **base de splines** o una **B-spline**, d'acord amb la terminologia utilitzada per de Boor pàg. 87, encara que ell cita Curry-Schoenberg (1947) com als primer autors que la defineixen.

### A.8.1 PROPIETATS DE LES B-SPLINE

1) Aquí hem preferit definir les *B-spline* a partir del concepte de diferències dividides d'una funció, per posar de manifest la facilitat de càlcul dels coeficients dels polinomis interpoladors. Llavors no té importància la quantitat d'observacions que disposem (centenars, milers, etc.), perquè els càlculs del polinomi interpolador es simplifiquen extraordinàriament.

2) També es posa de manifest la transició suau d'un *spline* al següent i dependent del grau de la base de *splines* que prenguem, aquesta transició suau es pot estendre a les derivades primeres, segones, etc.

3) Es pot definir la base de *splines* a partir de la fórmula de recurrència, tenint en compte que una *B-spline* d'ordre 1 està formada per segments de rectes paral·leles a l'eix d'abscisses per a tots els valors de  $t$  i zero en la resta; les *B-spline* d'ordre 2 són segments de rectes, etc. Però és més còmode fer-ho amb diferències dividides per facilitar els càlculs i potser també la comprensió.

4) Tenint en compte que la suma algebraica de *splines* és també una *spline* i que la combinació lineal de *splines* és una *spline*, una combinació lineal de *B-splines* és també una *spline* que es denomina **funció spline**. (de Boor pàg. 93).

5) Encara que hi ha molts camins per construir aquestes bases de *B-splines*, el sistema desenvolupat per de Boor (2001) és el més popular. El codi per treballar amb *B-splines* està disponible en un ampli rang de llenguatges de programació, incloent-hi R<sup>23</sup> *S-PLUS*<sup>®</sup> i *MATLAB*<sup>®</sup>. Com veurem més endavant, hem utilitzat els programes en R, perquè és un programa d'ús lliure, en el qual estan disponibles tots els paquets necessaris per dur a terme els càlculs pertinents. (Ramsay i Silverman (2005) pàg. 49.

### A.9 ESTIMACIÓ PER MÍNIMS QUADRATS ORDINARIS (MQO) AMB UNA FUNCIÓ B-SPLINE

Encara que sigui molt coneguda la fórmula d'aplicació dels MQO és convenient fer una petita introducció, sobretot per introduir alguns conceptes com:

- La determinació del grau de les *B-splines*.
- La funció *B-spline* que serà l'estimador.
- El nombre de funcions bases que forma part de la funció d'estimació.

Si disposem de  $n$  observacions, l'equació (29) es pot escriu-

re en forma matricial:

$y = \mathbf{x}(t) + \varepsilon$  on  $y$ ,  $\mathbf{x}(t)$  i  $\varepsilon$  són vectors columna d'ordre  $n$

(A21)

La funció que prenem com estimador de  $\mathbf{x}(t)$  és una **funció spline**, d'acord amb la propietat 4 de l'epígraf B.8.1, que es pot escriure:

$$x(t) = \sum_k c_k B_k(t)$$

$$\begin{bmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \vdots \\ x(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(t_1) & B_2(t_1) & \dots & B_K(t_1) \\ B_1(t_2) & B_2(t_2) & \dots & B_K(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_1(t_n) & B_2(t_n) & \dots & B_K(t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$$

(A22)

O bé, abreujadament:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{c}$$

(A23)

On  $\mathbf{B}$  és la matriu d'ordre  $n \times K$  formada per *B-splines*, sent  $K$  el nombre de *B-splines* contingudes a la funció suavitzadora.

Substituint (A23) a (A21), resulta:

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{c} + \varepsilon$$

(A24) 23

Cal recordar que els errors han de ser independents de  $\mathbf{y}$ , a més han d'estar idènticament distribuïts; si no estiguessin idènticament distribuïts hauríem de conèixer la matriu de variàncies dels errors i aplicar-hi mínims quadrats ponderats.

Per obtenir els estimadors MQO de (C4) hem de trobar el vector de paràmetres  $\mathbf{c}$  que minimitza la suma d'errors al quadrat:  $\varepsilon'\varepsilon$ ; si calculem, doncs, la derivada de  $\varepsilon'\varepsilon$  igualant-la a zero i resollem l'equació (matricial), resulta:

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{c}} = (\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{y}$$

(A25)

Que és la coneguda fórmula dels estimadors MQO, però recordant un cop més que  $\mathbf{B}$  és una matriu formada per *B-splines*.

- El grau de les *B-splines* depèn de les condicions que imposablem a les *splines*; com que aquí estem interessats en el comportament, és a dir el creixement i decreixement, i la concavitat, la convexitat i els punts d'inflexió, de la funció d'acceleració  $w(t)$ , necessitarem fins a la derivada tercera d'aquesta. I tenint en compte que l'acceleració és la derivada segona del valor final del capital  $C(t)$  resulta que el grau de les *B-splines* és de 5 amb la qual cosa l'ordre serà de 6.

<sup>23</sup> Els càlculs necessaris per trobar les *B-splines* i demés instruments estadístics i computacionals utilitzats en aquest treball han estat fets amb el programa de lliure accés: R Foundation for Statistical Computing, Viena, Àustria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.

- El suavitzador és una funció *B-spline* que es construeix a partir de la combinació lineal de *B-splines* d'ordre 6 en el nostre cas.
- El nombre de *B-splines* o bases de *splines* necessàries per definir el suavitzador ve donat, segons hem demostrat a l'epígraf A.2 d'aquest apèndix, pel nombre de nusos interiors més l'ordre; si hi ha 23 nusos interiors i l'ordre és 6, el nombre de *B-splines* és 29.

# TAULES I FIGURES DE L'APÈNDIX

Taula A4

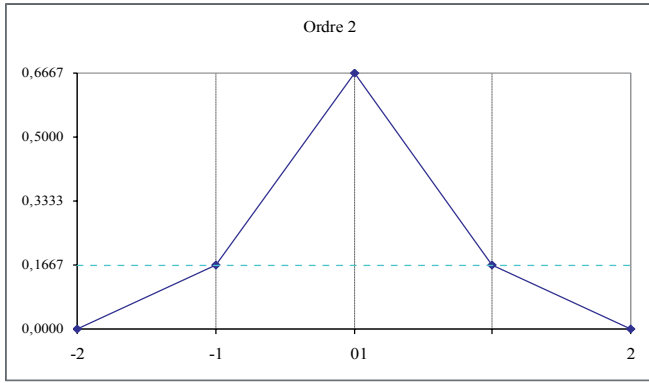
	Funció	Diferències dividides de primer ordre	Diferències dividides de segon ordre	Diferències dividides de tercer ordre
0	$f(0) = 100$	$f(0,1) = \frac{103-100}{1-0} = 3$	$f(0,1,2) = \frac{4-3}{2-0} = \frac{1}{2}$	$f(0,1,2,3) = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{3-0} = -\frac{2}{3}$
1	$f(1) = 103$	$f(1,2) = \frac{107-103}{2-1} = 4$	$f(1,2,3) = \frac{1-4}{3-1} = -\frac{3}{2}$	
2	$f(2) = 107$	$f(2,3) = \frac{108-107}{3-2} = 1$		
3	$f(3) = 108$			

Taula A5

Diferències dividides d'una funció d'ordre  $n$ 

Punts	Valors de la funció	Diferències dividides de primer ordre	Diferències dividides de segon ordre	Diferències dividides d'ordre $n-1$
$x_0$	$f(x_0) = a_1$	$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = a_2$	$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = a_3$	$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{f(x_1, \dots, x_{n-1}) - f(x_0, \dots, x_{n-2})}{x_{n-1} - x_0} = a_n$
$x_1$	$f(x_1)$	$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$	$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}$	...
$x_2$	$f(x_2)$	$f(x_2, x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$		...
...	...	...		
$x_{n-2}$	$f(x_{n-2})$	$f(x_{n-2}, x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}$		...
$x_{n-1}$	$f(x_{n-1})$			

Figura A1



Figures A4, A5 i A6

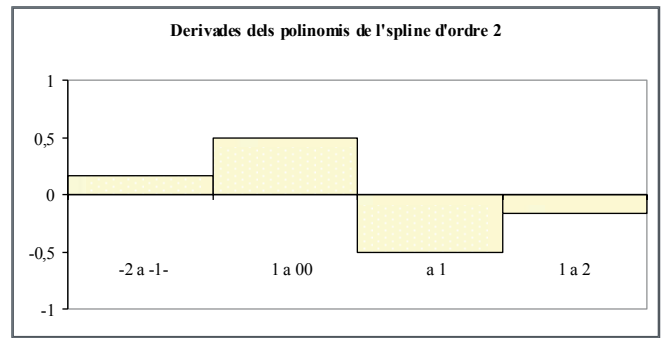
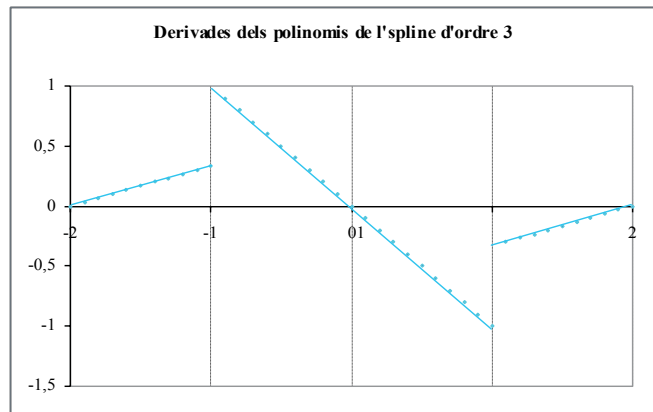
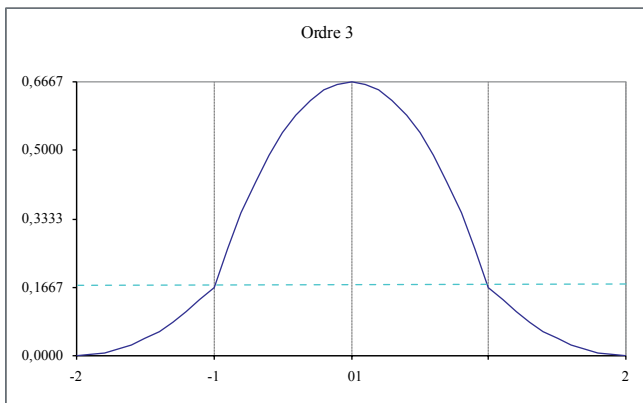
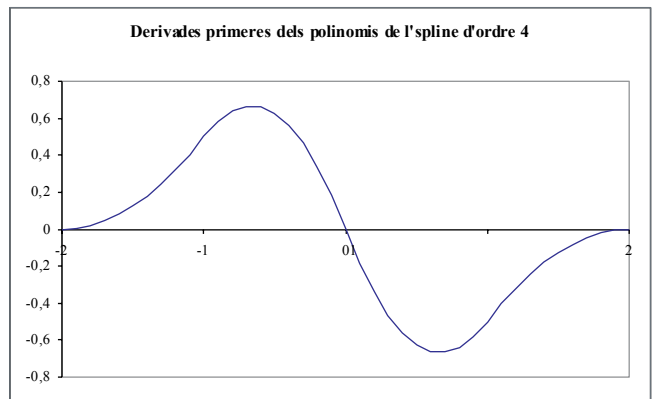
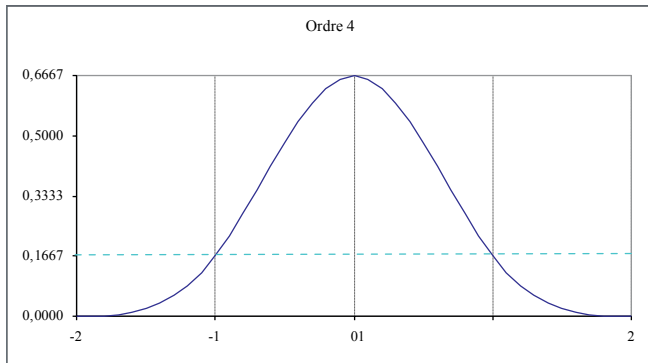


Figura A2



26

Figura A3





## CONCLUSIONS I PROLONGACIÓ DEL TREBALL

En les pàgines que precedeixen aquestes conclusions hem fet palès que l'aplicació de l'anàlisi de dades funcionals (fda) al creixement del valor final d'un capital és possible i que, a més a més, s'enforteixen els principis bàsics de la matemàtica financera en el sentit que no només tenim en compte el creixement estricte, sinó que veiem com aquest es produeix al llarg del temps mitjançant la introducció de la velocitat i l'acceleració del creixement. És a dir, ens hem lliurat del requeriment de creixement uniforme i/o constant del valor final d'un capital.

Aquest primer treball té com a limitació el termini temporal dels tipus d'interès elegits, atès que no hem considerat tipus de periodicitat superior a l'any i també que tots els tipus considerats són al comptat.

Com a tasca futura immediata ens proposem ampliar l'estudi en una doble vessant: d'una banda, considerar tipus a termini i veure la relació que existeix (si és que realment existeix) entre els tipus al comptat i els tipus *forward*, i de l'altra, incloure en l'anàlisi el comportament dels tipus cupó zero.

En aquesta darrera aplicació pensem que l'anàlisi de dades funcionals hi té un paper molt important, en el sentit que pot proporcionar interpolacions acurades sobretot si tenim en compte que els terminis que cotitzen en el mercat al comptat són llargs i molt espaiats en el temps.

## BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Conde, C., Hidalgo, A. & López, A. *Interpolación polinómica*. Publicació lectiva de l'assignatura Programación y métodos numéricos. Ed: Universidad Politécnica de Madrid, 2007.

Craven, P. & Wahba, G. «Smoothing Noisy Data with Spline Functions». *Numerische Mathematik by Springer Verlag 1979*, vol. 31, pàg. 377-403, 1979.

De Boor, K. *A Practical Guide to Splines*. 2000, Springer-Verlag, Nova York, 1978.

De La Grandville, O. *Bond pricing and portfolio analysis: protecting investors in the long run*. MIT Press, Cambridge, 2000.

Eilers, P.H.C. & Marx, B.D. Octubre 2010-última actualització. *Splines, Knots, and penalties* [Homepage of John Wiley & Sons, Inc.], [Online]. Disponible a: [www.wiley.com/wires/compstats](http://www.wiley.com/wires/compstats) [2010, 12/11/2010].

Febrero-Bande, M. «A Present Overview on Functional Data Analysis». *Boletín de la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa*, vol. 24, no. 1, pàg. 7-14, 2008.

Insolera, F. *Curso de Matemática Financiera y Actuarial*. Aguilar, S.A. de Ediciones, Madrid, 1916.

Jevons, W.S. *The Theory of Political Economy*. 5a ed. Kelley & Millman, Nova York, 1957.

Lóbez Urquía, J. *Matemática financiera con nociones de cálculo actuarial*. Gráficas Instar, Barcelona, 1968.

Navarro, V. *Análisis de datos funcionales. Implementación y aplicaciones*. Projecte final de carrera: Facultat de Matemàtiques i Estadística (UPC) edn, Barcelona, 2004.

Paluszny, M., Prautzsch, H. & Boehm, W. *Métodos de Bézier y B-Splines*. edició en castellà, Springer Verlag Berlín, Universitätsverlag Karlsruhe, 2002.

Ramsay, J.O. & Silverman, B.W. *Functional data analysis*. 2nd edn, Springer, Nova York, 2005.

Svensson, L. , «Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson and Siegel Method». *Sveriges Riksbank Quarterly Review*, vol. 3, no. 1995, pàg. 13, 1995.

Villazón, C. & Sanou, L. *Matemática financiera*. 1a ed, Foro Científico, Barcelona, 1993.

## PROGRAMARI UTILITZAT

Els càlculs necessaris per trobar les *B-splines* i demés instruments estadístics i computacionals utilitzats en aquest treball han estat fets amb el programa de lliure accés: **R Foundation for Statistical Computing**, Viena, Àustria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.

Hem fet servir els paquets següents: pkgfda, pkgsplines, pkgzoo, pkgdtk

## AGRAÏMENTS

Volem agrair al Dr. Antonio Terceño i a l'avaluador anònim els seus comentaris i suggeriments

## SOBRE ELS AUTORS

**Lina Sanou Vilarrodona**

Doctor en Ciències Econòmiques  
Catedràtic EU jubilada d'Estadística  
Professora de la UAB

**Cèsar Villazón Hervàs**

Doctor en Ciències Polítiques, Econòmiques i Comercials  
Catedràtic EU jubilat de Matemàtica Financera  
Professor de la UAB

La responsabilitat de les opinions emeses en aquest document corresponen exclusivament als seus autors. ODF no s'identifica necessàriament amb aquestes opinions.

© Fundació privada Institut d'Estudis Financers. Reservats tots els drets.