

# La ecuación general de capitalización y los factores de capitalización unitarios: una aplicación del análisis de datos funcionales

César Villazón  
Lina Sanou

## Resumen

La fórmula general de capitalización sólo tiene en cuenta el crecimiento del valor de un capital ateniendo a que los tipos de interés de las sucesivas reinversiones son positivos. Pero cuando consideramos una sucesión de tipos EURIBOR a 1 día y calculamos los correspondientes valores finales vemos que dicho crecimiento no es uniforme, sino que presenta intervalos de tiempo con una fuerte aceleración y otros con aceleración.

Nos planteamos, pues, la necesidad de formular de nuevo la ley general de capitalización, de forma que incluya dichas características y llegaremos a la ya conocida ecuación diferencial (de segundo orden) del crecimiento y a su solución general.

Para poder encontrar la solución particular para cada caso concreto, nos proponemos llevar a cabo una estimación con los datos que disponemos utilizando las técnicas que nos ofrece el análisis de datos funcionales y, más concretamente, las técnicas de suavización con funciones *B-spline*.

Creemos oportuno incluir un apéndice en el que, de forma muy resumida pero comprensible, exponemos los principios básicos del ajuste con funciones *splines* seguido de un breve resumen del análisis de datos funcionales y terminamos con la definición de las bases de las funciones *splines*.

Podemos considerar que esta primera aproximación ha resultado satisfactoria, sobre todo teniendo en cuenta las dificultades que plantea la estimación de funciones estrictamente crecientes y con bastante variabilidad.

# ÍNDICE

RESUMEN	1	12.1	INTERPOLACIÓN DE LOS FACTORES DE CAPITALIZACIÓN UNITARIOS	
ANTECEDENTES	4	13	EXTENSIONES DE LA INTERPOLACIÓN	
1 FÓRMULA GENERAL DE CAPITALIZACIÓN		TABLAS Y FIGURAS		13
2 CAPITALIZACIÓN CONTINUA A TIPO DE INTERÉS CONSTANTE		Tabla 1: Puntos de inflexión aproximados de los factores de capitalización unitarios a 1 día durante el primer año.		
2.1 DEDUCCIÓN TRIVIAL DEL TIPO $\delta$		Tabla 2: Distribución de los puntos de inflexión durante todo el periodo de observación.		
2.2 DESCOMPOSICIÓN EN PERIODOS SUCESIVOS DE CAPITALIZACIÓN		Figura 1: División del intervalo de integración en subintervalos parciales.		
2.3 FACTORES DE CAPITALIZACIÓN UNITARIOS	5	Figura 2: Evolución de los tipos EURIBOR a 1 día.		
2.4 INTERPRETACIÓN Y LIMITACIONES DE $\delta_i(t_{i-1}, t_i)$		Figura 3: Evolución de los factores de capitalización unitarios desde enero de 2001 hasta diciembre de 2009. El tiempo está expresado en fracción de año.		
EJEMPLO 1		Figura 4: Tipos EURIBOR a 6 meses.		
3 FORMA DE LA CURVA DE CRECIMIENTO: PUNTOS DE INFLEXIÓN	6	Tabla 3: Factores de capitalización unitarios a 6 meses y el ajuste.		
4 VELOCIDAD Y ACELERACIÓN DEL CRECIMIENTO DEL VALOR ACUMULADO		Figura 5: Representación de las cifras indicadas en la tabla 3.		15
5 RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL	7	Figura 6: Tipos EURIBOR a 1 mes.		
$\frac{d^2C(t)}{dt^2} = w(t) \cdot \frac{dC(t)}{dt}$		Figura 7: Valores finales reales calculados con el EURIBOR a 1MES y valores finales a 1MES estimados sin restricciones.		
6 DE LOS DATOS DISCRETOS A LOS DATOS FUNCIONALES	8	Figura 8: últimas 26 observaciones y los valores ajustados.		
7 AJUSTE POR MQO CON <i>B-SPLINES</i>		Figura 9: Observaciones discretas, ajuste con variabilidad alta y ajuste sin rugosidad.		
7.1 FACTORES DE CAPITALIZACIÓN UNITARIOS (FCU) CON TIPOS A 6 MESES		Tabla 4: Nodos, orden de las splines, número de funciones bases, creación de las <i>B-splines</i> , nodos interiores		16
7.2 VALORES FINALES CON TIPOS A 1 MES	9	Figura 10: Suavización de los factores de capitalización unitarios a 1MES con la restricción de crecimiento absoluto y sin penalización por variabilidad.		
8 AJUSTE CON FUNCIONES ERICTAMENTE MONÓTONAS		Figura 11: Suavización de los factores de capitalización unitarios a 1MES con la restricción de crecimiento absoluto, con un factor de penalización igual a dos y un parámetro de suavización $\lambda = 10^{-0,5}$ .		
9 IMPLICACIONES DEL AJUSTE CON <i>B-SPLINES</i>		Figura 12: Valores reales observados y valores estimados de los factores de capitalización unitarios. La suavización se ha hecho sin restricciones de crecimiento pero con penalización a la derivada segunda con un parámetro de penalización $\lambda = 10^{-0,01}$ .		17
9.1 EL SESGO DE LA ESTIMACIÓN		Figura 13: Errores de la estimación; aunque en el tramo final se disparan no llega a ser más del 1,5 por mil.		
9.2 LA VARIANZA DE LA ESTIMACIÓN	10	Figura 14: Suavización <i>fine</i> con 200 nodos manteniendo los dos nodos exteriores y sus correspondientes valores estimados.		
9.3 EL ERROR CUADRÁTICO MEDIO (EQM)				
9.4 RELACIÓN ENTRE SESGO, VARIANZA Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO				
9.5 CUANTIFICACIÓN DE LA RUGOSIDAD ( <i>ROUGHNESS</i> )				
Figura 8				
9.6 APLICACIÓN EN LA ESTIMACIÓN MQ				
10 RESPUESTA A LAS IMPLICACIONES DEL AJUSTE CON <i>B-SPLINES</i>	11			
11 FACTORES DE CAPITALIZACIÓN UNITARIOS A UN MES				
11.1 AJUSTE CON RESTRICCIÓN DE CRECIMIENTO Y PENALIZACIÓN				
11.2 SUAVIZACIÓN CON PENALIZACIÓN EN LA CURVATURA				
12 LA SUAVIZACIÓN CON NODOS EQUIDISTANTES	12			

Figura 15: Velocidad de crecimiento de los factores unitarios de capitalización a 1 mes calculados con la primera derivada de la función suavizadora que hemos representado en la figura 14.

Figura 16: Aceleración del crecimiento de los factores de capitalización unitarios, calculados como la segunda derivada de las *B-splines* que dan lugar a la función suavizadora de la figura 14.

## APÉNDICE

### INTRODUCCIÓN

A.1.	EJEMPLO DE APROXIMACIÓN MEDIANTE <i>SPLINES</i>	
A.2	NODOS Y GRADOS DE LIBERTAD	19
	Tabla A1	20
	Tabla A2	
	Tabla A3	
	EJEMPLO A.2	21
A.3	GENERALIZACIÓN: LA FÓRMULA DE INTERPOLACIÓN DE NEWTON	
A.3.1	PROPIEDADES	22
A.3.2	CONTINUACIÓN EJEMPLO A3	
A.4	DIFERENCIAS DIVIDIDAS Y EL POLINOMIO DE NEWTON	
A.5	DEFINICIÓN DE DIFERENCIA DIVIDIDA	
A.5.1	CONSECUENCIAS DE LA DEFINICIÓN EJEMPLO A.4	23
A.6	LA FORMA DE LA CURVA Y LAS DIFERENCIAS DIVIDIDAS DE UNA FUNCIÓN	
A.7	DIFERENCIAS DIVIDIDAS DEL MONOMIO $(t-x)^{k-1}$	
A.8	DEFINICIÓN DE <i>B-SPLINE</i>	
A.8.1	PROPIEDADES DE LAS <i>B-SPLINE</i>	24
A.9	ESTIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS (MQO) CON UNA FUNCIÓN <i>B-SPLINE</i>	
	TABLAS Y FIGURAS DEL APÉNDICE	26
	Tabla A4	
	Tabla A5	
	Diferencias divididas de una función de orden $n$	
	Figura A1	
	Figura A2	27
	Figura A3	
	Figuras A4, A5 y A6	
	CONCLUSIONES Y PROLONGACIÓN DEL TRABAJO	28
	BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA	29
	PROGRAMARIO UTILIZADO	
	SOBRE LOS AUTORES	

## ANTECEDENTES

El año 1871, Stanley Jevons en su obra *The Theory of Political Economy*. Reprint. Edited by R. D. Collison Black. Harmondsworth: Penguin Books, 1970 formuló los principios que más tarde hemos interpretado como la ley general de capitalización.

Desde entonces, Insolera en su obra "Curso de Matemática Financiera y Actuarial" y posteriormente otros autores aplicaron el razonamiento de Jevons en el caso de un capital sometido a un proceso de capitalización.

## 1 FÓRMULA GENERAL DE CAPITALIZACIÓN

Consideramos un capital  $C(t)$  sometido a un proceso de capitalización aquél que los intereses que ha ido produciendo se han ido acumulando inmediatamente al capital. Ello supone que tanto el capital  $C(t)$  como el propio tiempo  $t$  son funciones continuas, entendiéndose que la primera es una función continua del tiempo y la segunda es la variable independiente real.

Igualmente supondremos que el tipo de interés que se debe aplicar en cada instante es una función continua del tiempo que representaremos por  $\rho(t)$ . Si el capital  $C(t)$  está invertido durante un infinitésimo de tiempo:  $dt$ , los intereses producidos por dicho capital serán:

$$C(t) \cdot \rho(t) \cdot dt = dC(t) \quad (1)$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver fácilmente; para hacerlo pasamos  $C(t)$  al segundo miembro y a continuación integramos:

$$\ln C(t) + k = \int \rho(t) dt \quad (2)$$

Donde  $k$  es la constante que se ha sumado en cualquier integral indefinida.

Es del todo ilógico que el valor de un capital dependa de una constante indeterminada; pero si tenemos en cuenta que todo proceso de capitalización tiene una fecha de inicio (0) y que también finaliza en un instante concreto ( $T$ ), tendríamos que considerar la anterior integral como definida, obteniendo:

$$C(t) = C(0) \cdot \exp \left[ \int_0^T \rho(t) dt \right] \quad (3)$$

La integral definida:

$$\int_0^T \rho(t) dt \quad (4)$$

Mide los intereses acumulados por una unidad monetaria durante el periodo de capitalización que va desde el instante inicial 0 hasta el momento final  $T$ .

## 2 CAPITALIZACIÓN CONTINUA A TIPO DE INTERÉS CONSTANTE

En la práctica no se acostumbra a utilizar el régimen general de capitalización ya que su aplicación es muy engorrosa y se substituye por la capitalización continua o, tal y como se denomina en la literatura anglosajona, la capitalización compuesta continuamente que quiere decir que el valor final de un capital se puede obtener aplicando un tipo de interés constante por todo el periodo.

Si en la fórmula general de capitalización, resolvemos la integral del exponente del segundo miembro, tendremos que:

$$C(T) = C(0) \cdot \exp \left[ \int_0^T \rho(t) dt \right] = C(0) \cdot e^{\varphi(T)} \quad (5)$$

### 2.1 DEDUCCIÓN TRIVIAL DEL TIPO $\delta$

Si consideramos que  $\rho(t)$  es constante durante todo el periodo de capitalización:  $\rho(t) = \delta$ , de forma que una vez integrada la función, resulta  $\delta \cdot T$ ; a posteriori ello significa que el valor de la función  $\varphi(T)$  también es igual a  $\delta \cdot T$ . Así:

$$\{\rho(t) = \text{CONSTANT} \equiv \delta, \forall t \in (0, T)\} \Rightarrow \varphi(T) = \delta \cdot T \quad (6)$$

Y de esta forma hemos obtenido como valor final:

$$C(T) = C(0) \cdot e^{\delta T} \quad (7)$$

La forma más cómoda de obtener el tipo de interés en capitalización continua consiste en aislar  $\delta$  de la ecuación (6), resultando:

$$\delta = \frac{\varphi(T)}{T} \quad (8)$$

Es evidente que la aproximación de  $\rho(t)$  por una constante será mejor cuando más pequeño sea el periodo de capitalización y la substitución de  $\rho(t)$  por  $\delta$  no planteará ningún problema si  $\Delta t$  es un infinitésimo.

### 2.2 DESCOMPOSICIÓN EN PERIODOS SUCESIVOS DE CAPITALIZACIÓN

Podemos utilizar una propiedad de la integral definida que nos permita descomponer el intervalo total de integración en subintervalos tan pequeños como deseamos.

Esto es dividiendo el intervalo total de integración  $(0, T)$  en subintervalos parciales consecutivos de forma que el ori-

gen del primer subintervalo es igual a 0 y el extremo del último es igual a  $T$ , y además, hacemos que el extremo de cada subintervalo sea el origen del siguiente de acuerdo con el esquema diseñado en la figura 1.

Teniendo en cuenta lo que acabamos de afirmar, podemos descomponer el intervalo de integración en los subintervalos descritos en la figura 1, así la integral (4) quedaría escrita de la siguiente forma:

$$\int_0^T \rho(t) dt = \int_0^{t_1} \rho(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt + \int_{t_2}^{t_3} \rho(t) dt + \dots + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \rho(t) dt + \int_{t_{n-1}}^T \rho(t) dt \quad (9)$$

A cada una de las integrales anteriores podemos aplicar el teorema del valor medio, lo que significa que existe un conjunto de parámetros  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$  que verifican la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \int_0^T \rho(t) dt &= \int_0^{t_1} \rho(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt + \int_{t_2}^{t_3} \rho(t) dt + \dots + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \rho(t) dt + \int_{t_{n-1}}^T \rho(t) dt = \\ &= \Delta t_1 \cdot \rho(t_0 + \Theta_1 \cdot \Delta t_1) + \Delta t_2 \cdot \rho(t_1 + \Theta_2 \cdot \Delta t_2) + \dots + \Delta t_n \cdot \rho(t_{n-1} + \Theta_n \cdot \Delta t_n) \end{aligned} \quad (10)$$

Con ello, la integral  $\int_0^T \rho(t) dt$

se puede escribir de forma equivalente mediante la expresión:

$$\int_0^T \rho(t) dt = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot \rho(t_{i-1} + \Theta_i \cdot \Delta t_i) \quad (11)$$

Teniendo en cuenta que todas y cada una de las expresiones  $\Delta t_i \cdot \rho(t_{i-1} + \Theta_i \cdot \Delta t_i)$  que aparecen en el segundo miembro de (11) quedan reducidas a constantes, las que podemos designar por  $\delta_i(t_{i-1}, t_i)$ , resultando:

$$\int_0^T \rho(t) dt = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot \rho(t_{i-1} + \Theta_i \cdot \Delta t_i) = \sum_{i=1}^n \delta_i(t_{i-1}, t_i) \cdot \Delta t_i \quad (12)$$

Con lo cual el valor final de un capital  $C(0)$  colocado en un régimen de capitalización definido por una función continua  $\rho(t)$  que hemos deducido según la fórmula (5) se puede calcular de manera equivalente mediante una sucesión de capitalizaciones compuestas continuamente con los tipos de interés discretos ( $[\delta_i(t_{i-1}, t_i) \quad i = 1, 2, \dots, n]$ ), y los valores finales obtenidos son idénticamente iguales:

$$C(T) = C(0) \cdot \exp \left[ \int_0^T \rho(t) dt \right] \Leftrightarrow C(T) = C(0) \cdot \exp \left[ \sum_{i=1}^n \delta_i(t_{i-1}, t_i) \cdot \Delta t_i \right] \quad (13)$$

## 2.3 FACTORES DE CAPITALIZACIÓN UNITARIOS

Si consideramos que el capital inicialmente invertido es de una unidad monetaria, el segundo miembro de la segunda ecuación de (13) queda:

$$\exp \left[ \sum_{i=1}^n \delta_i(t_{i-1}, t_i) \cdot \Delta t_i \right]$$

Cada una de las exponenciales que aparecen recibe el nombre de **factor capitalización** que de forma genérica podemos designar por  $e^{\delta t}$ .

Por ejemplo, si el tipo anual de capitalización continua es del 6%, el factor de capitalización unitario es:  $e^{0,06} = 1,06183655$ . Si se ha invertido un millón de euros, el valor final al cabo de un año es:  $1.000.000 \times 1,06183655 = 1.061.836,55 \text{€}$ .

## 2.4 INTERPRETACIÓN Y LIMITACIONES DE $\delta_i(t_{i-1}, t_i)$

Siempre que los intervalos de tiempo sean suficientemente pequeños es indiferente aplicar la primera o la segunda de las (13). Si consideramos que el plazo más pequeño utilizado en los mercados financieros es un día (TN) y que los tipos siempre son anuales, el incremento de  $t$  expresado en años sería igual a:  $\Delta t = \frac{1}{365} = 0,0027397260 \approx 0,00274$  años.

### EJEMPLO 1

Consideramos una sucesión de tipo EURIBOR a 1DÍA, desde 31 de diciembre de 1998 hasta 31 de diciembre de 2009 (figura 2)<sup>1</sup>. Utilizando la terminología presentada en el apartado 2.2 disponemos de una serie temporal de 4.019 tipos diarios:  $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{4018}$ , de forma que considerados conjuntamente configurarían una función  $\rho(t)$  de la cual desconocemos la estructura funcional, pero sí sabemos que el valor final de una unidad monetaria invertida durante los 4.019 días a los tipos diarios correspondientes, nos daría a 1 de enero de 2010 un valor final de 1,3875733. Esta operación es completamente lícita dado que conocemos los tipos diarios antes de realizar la reinversión<sup>2</sup>.

También podríamos calcular los tipos de interés equivalentes en capitalización continua mediante la fórmula:  $\delta(\text{diario}) = \ln \left( 1 + \frac{i}{36000} \right)$ .

Hemos dividido los tipos EURIBOR por 36.000 porque:

- la convención utilizada en los mercados monetarios de la EUROZONA es considerar el año comercial de 360 días en las operaciones a corto plazo y,
- los tipos EURIBOR están expresados en porcentaje.

<sup>1</sup> Los datos se han obtenido de la web del Banco de España.

<sup>2</sup> No tenemos en cuenta la fecha valor, lo único que haría sería retardar la colocación en dos días y retardar también la reinversión, pero suponemos que no altera el valor final de la inversión.

<sup>3</sup> La explicación de la fórmula se puede encontrar en el epígrafe A.6 del Apéndice.

Con todo ello tendríamos de la serie temporal de tipos en capitalización continua:  $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{4018}$  que nos proporcionan los mismos valores finales.

En la figura 3, hemos representado la evolución de los valores finales logrados durante este periodo de tiempo. De la simple observación podemos extraer las siguientes conclusiones:

- La serie de valores finales es creciente dado que los tipos de interés son siempre positivos.
- El crecimiento no es uniforme. Es decir, la curva presenta un comportamiento irregular pasando de convexa a cóncava y viceversa, lo cual significa que la ecuación diferencial planteada (1) representativa de la evolución del valor final de un capital y su solución que es una función exponencial del tipo:

$$\exp \left[ \int_0^T \rho(t) dt \right]$$

no son suficientes para capturar todas las características de la forma (*shape*) de la curva representada en la gráfica.

### 3 FORMA DE LA CURVA DE CRECIMIENTO: PUNTOS DE INFLEXIÓN

Se puede pensar que, a pesar que el crecimiento no sea uniforme y sostenido, no vale la pena tener en cuenta los pocos cambios en la aceleración que se deducen de las gráficas.

Pero si calculamos el valor aproximado de las derivadas segundas a partir de los valores capitalizados obtenidos, utilizando la fórmula<sup>3</sup>:

$$C''(t_i) \approx \frac{\frac{C(t_{i+1}) - C(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \frac{C(t_i) - C(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (14)$$

y aplicando, ahora, esta fórmula, calculamos los valores aproximados de la derivada segunda de las colocaciones a 1DÍA; un resumen de ello se puede ver en la tabla 1, donde hemos encontrado los valores aproximados de la derivada segunda para el mes de enero de 1999, y vemos que ha cambiado de signo 8 veces durante el periodo de un mes.

Podríamos hacer lo mismo tomando distintos periodos, pero para no alargar innecesariamente el proceso, hemos dividido el periodo total de observación en 16 intervalos iguales que contienen 250 observaciones cada uno, más uno adicional de sólo 16 valores finales; en cada uno de estos intervalos hemos contado el número total de cambios de signo que representan en mediana un 31% con un pico del 49% en el periodo comprendido entre el 8/4/09 y

el 13/12/09, y un mínimo del 19% en el intervalo de tiempo que va desde el 5/11/05 al 12/7/06, resultados que presentamos en la tabla 2.

Teniendo en cuenta lo que acabamos de observar sobre el comportamiento y la evolución de la función valor final de un capital, podemos formular las siguientes hipótesis:

- La función  $C(t)$  es monótona, crece siempre que los tipos de interés sean positivos; por tanto, la derivada primera deberá ser positiva.
- La función  $C(t)$  puede ser cóncava o convexa dependiendo del intervalo de tiempo que se considere, lo que significa que la derivada segunda no tiene signo constante.

Para poder incorporar estas hipótesis nos proponemos modificar el modelo especificado para la ecuación diferencial ( ) y su solución (2) representativa del valor final de un capital según lo que explicamos en el siguiente epígrafe.

### 4 VELOCIDAD Y ACELERACIÓN DEL CRECIMIENTO DEL VALOR ACUMULADO

En lugar de velocidad y aceleración en el crecimiento del valor acumulado, podríamos utilizar un lenguaje menos "físico" y hablar de:

- curva creciente o decreciente, y
- forma de la curva y/o de concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

O de manera equivalente de:

- derivada primera positiva o negativa
- derivada segunda negativa o positiva

Preferimos utilizar esta nomenclatura porque tiene un sentido más gráfico y quizás más cercano a lo que queremos explicar.

Consideramos el valor final de un capital en el instante de tiempo  $t_i \Rightarrow C(t_i)$ ; en este momento el valor acumulado crece a una velocidad  $V(t_i)$  que, tal y como hemos visto en las representaciones gráficas de la evolución del valor final de un capital, será diferente de la velocidad lograda en el instante  $t_{i+1} \Rightarrow V(t_{i+1})$ .

Esta última consideración nos permite introducir el concepto de aceleración del crecimiento del valor final de un capital: la aceleración es el cambio de velocidad por unidad de tiempo:

$$\text{Aceleración } (t_i) = \frac{V(t_{i+1}) - V(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \frac{\Delta V(t_i)}{\Delta t_i} \quad (15)$$

Para poder determinar la ecuación de aceleración tenemos que realizar algunas hipótesis sobre el comportamiento de la diferencia de velocidades  $V(t_{i+1}) - V(t_i)$ :

<sup>3</sup> La explicación de la fórmula se puede encontrar en el epígrafe A.6 del Apéndice.



a) Es evidente que dicha diferencia tenderá a ser mayor (menor) cuanto mayor (menor) sea el intervalo de tiempo considerado  $t_{i+1} - t_i$  de forma que sin pérdida de generalidad podemos decir que  $V(t_{i+1}) - V(t_i)$  será directamente proporcional a la amplitud del intervalo  $t_{i+1} - t_i$ .

b) También dependerá de la velocidad lograda en el momento  $t_i \Rightarrow V(t_i)$ ; supondremos, pues, que la diferencia  $V(t_{i+1}) - V(t_i)$  es, también, directamente proporcional a  $V(t_i)$ , que es la velocidad en el punto inicial del intervalo considerado.

c) Finalmente, consideramos que esta diferencia de velocidades depende de un parámetro variable  $w(t_i)$  que representa el cambio en la velocidad y por ello lo denominaremos **parámetro de aceleración**; cuanto mayor sea  $w(t_i)$  mayor será la aceleración; por tanto, la diferencia  $V(t_{i+1}) - V(t_i)$  también será directamente proporcional al parámetro de aceleración  $w(t_i)$ .

En consecuencia el incremento de velocidad:  $\Delta V(t_i) = V(t_{i+1}) - V(t_i)$  es directamente proporcional a cada una de las siguientes magnitudes:

- al intervalo  $t_{i+1} - t_i$
- a la velocidad inicial  $V(t_i)$
- al parámetro de aceleración (desconocido)  $w(t_i)$

Escribiendo la ecuación (de proporcionalidad compuesta), que relaciona el incremento de velocidad con estas tres variables:

$$V(t_{i+1}) - V(t_i) = V(t_i) \cdot w(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

Podemos expresar la ecuación de aceleración (15) como:

$$\frac{V(t_{i+1}) - V(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = V(t_i) \cdot w(t_i) \Rightarrow \frac{\Delta V(t_i)}{\Delta t_i} = V(t_i) \cdot w(t_i) \quad (16)$$

Esto nos permitirá obtener  $w(t_i)$ .

Cuando  $t_{i+1} - t_i = \Delta t_i$  tiende a cero, se transforma en  $dt$  y si la función  $V(t_i)$  es continuamente<sup>4</sup> diferenciable, se convierte en  $dV(t)$ , con lo que tenemos:

$$\frac{dV(t)}{dt} = V(t) \cdot w(t) \quad (17)$$

Teniendo en cuenta que  $\frac{dV(t)}{dt}$  representa la aceleración  $A(t)$ , resulta que:

$$A(t) = V(t) \cdot w(t) \quad (18)$$

Y despejando  $w(t)$ , tenemos:

$$w(t) = \frac{A(t)}{V(t)} \quad (19)$$

Es decir,  $w(t)$  **representa la ratio de aceleración respecto a la velocidad**, o sea la aceleración relativa e indica que la aceleración del crecimiento del valor acumulado (valor capitalizado) se mide como fracción de la velocidad.

Dado que:

$$\frac{dC(t)}{dt} = V(t) \Rightarrow \frac{d^2C(t)}{dt^2} = \frac{dV(t)}{dt} = A(t) \quad (20)$$

substituyendo en la ecuación (18), resulta:

$$\frac{d^2C(t)}{dt^2} = w(t) \cdot \frac{dC(t)}{dt} \quad (21)$$

Ecuación diferencial de segundo orden que una vez resuelta nos proporcionará una fórmula más general de la evolución del capital acumulado que la deducida en el epígrafe 1, en la que sólo se tiene en cuenta la velocidad en el crecimiento del capital acumulado.

## 5 RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$\frac{d^2C(t)}{dt^2} = w(t) \cdot \frac{dC(t)}{dt}$$

Es muy sencilla de resolver, pero para hacerla aún más sencilla, denominamos:

$$y(t) \text{ a } \frac{dC(t)}{dt}, \text{ per tant, } \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2C(t)}{dt^2} \quad (22)$$

Substituyendo estos resultados en (21):

$$\frac{dy(t)}{dt} = w(t) \cdot y(t) \quad (23)$$

Y separando las variables, queda:

$$\frac{dy(t)}{y(t)} = w(t) \cdot dt \quad (24)$$

Realizando las operaciones e integrando para despejar  $y(t)$ :

$$\int_0^u \frac{dy(t)}{y(t)} = \int_0^u w(t) dt \Rightarrow y(u) = y(0) \cdot \exp \left[ \int_0^u w(t) dt \right] \quad (25)$$

Deshaciendo el cambio de variable (22), queda:

$$\frac{dC(u)}{du} = y(0) \cdot \exp \left[ \int_0^u w(t) dt \right] \quad (26)$$

Separando las variables:

$$\int_0^t dC(u) = \int_0^t y(0) \cdot \exp \left[ \int_0^u w(t) dt \right] du \quad (27)$$

<sup>4</sup> Cuando se haga la estimación de este modelo no solamente se debe imponer la condición de continuidad, sino también la diferenciableidad de la función de velocidad.

Integrando:

$$C(t) = C(0) + \int_0^t y(0) \cdot \exp\left[\int_0^u w(t) dt\right] du \quad (28)$$

Donde  $y(0)$  es el valor de la derivada de  $C(t)$  que como hemos visto es la velocidad del crecimiento del valor final en el punto 0, es decir:

$$y(0) = \left[\frac{dC(t)}{dt}\right]_{t=0}.$$

Dado que los tipos de interés EURIBOR son no negativos, la función  $C(t)$  es **positiva y monótona creciente**, en consecuencia su derivada primera,  $y(t) = \left[\frac{dC(t)}{dt}\right]$  también tiene que ser positiva.

Estas dos restricciones hay que tenerlas en cuenta cuando se intente hacer una estimación de la función de aceleración  $w(t)$ .

## 6 DE LOS DATOS DISCRETOS A LOS DATOS FUNCIONALES

En el ejemplo 1 hemos comprobado que el crecimiento de los valores finales en cada vencimiento no es uniforme, dado que se producen cambios en la velocidad de crecimiento. Sin embargo, nos convendría poder aplicar la teoría de la evolución del valor final expresada por la ecuación diferencial (21) y la solución formulada en (28).

Teniendo en cuenta que estamos interesados en la evolución de la aceleración del crecimiento del valor final, necesitamos ajustar una función  $w(t)$  tal que su derivada tercera sea diferente de cero, pero debido a que  $w(t)$  es la derivada segunda del crecimiento del valor final del capital, si ajustásemos un polinomio, este debería ser de grado 5.

A pesar de que esta serie temporal de valores finales observados sea discreta, presenta unas características de crecimiento, de concavidad y/o de convexidad similares a las de una función analítica explícita:  $f(x)$ . De forma que si dicha función es creciente cumple que  $f'(x) > 0$  y para saber si es cóncava o convexa buscaríamos el signo de su derivada segunda en un punto o en un intervalo según el caso, y lo mismo podemos decir de la función de aceleración.

Es evidente que si no encontramos un procedimiento de ajuste de cálculo rápido y eficiente, la teoría sobre la evolución del crecimiento del valor final de un capital no podría ser contrastada y quedaría en un mera elucubración teórica. Afortunadamente no es este el caso ya que aun-

que algunas de las características de crecimiento del valor final quedan escondidas o, como mínimo enmascaradas, por el carácter discrecional de los datos, se pueden poner de manifiesto a través del análisis de datos funcionales (*Functional Data Analysis: FDA*).

La forma explícita que nos ofrece el análisis de datos funcionales para representar cualquier punto de valor final es el de un par ordenado  $(t_i, y_i)$ , donde el primer elemento corresponde al tiempo y el segundo, al valor obtenido en aquella fecha.

Si asumimos la existencia de una función  $x$  que da origen a los valores finales obtenidos, podemos presentar los datos mediante el modelo:

$$y_i = x(t_i) + \varepsilon_i \quad (29)$$

Donde  $x(t_i)$  es una función suavizadora, con lo que hemos traspasado las partes angulosas de las observaciones iniciales al término de error que también subsume los errores de observación. Hemos transformado, pues, las observaciones discretas en datos funcionales.

La suavización de los datos se puede llevar a cabo utilizando *splines*. En nuestro caso, siguiendo el análisis de datos funcionales de Ramsay y Silverman, utilizaremos un sistema de **base de splines** o **B-splines** de acuerdo con la terminología usada por Carl de Boor (2001)<sup>5</sup>, que se puede consultar en el apéndice A, y que utilizaremos aquí en las aplicaciones prácticas que desarrollaremos a continuación.

## 7 AJUSTE POR MQO CON B-SPLINES

### 7.1 FACTORES DE CAPITALIZACIÓN UNITARIOS (FCU) CON TIPOS A 6 MESES

Una unidad monetaria se invierte a 6 meses al tipo EURIBOR del día.

El día de vencimiento se renueva automáticamente la inversión durante 6 meses más hasta llegar a la última reinversión. Si el día de la renovación hay mercado, el tipo de interés es el de este día, si no hubiese mercado, se toma el tipo de interés del último día hábil; por ejemplo si la renovación cae en domingo tomamos el tipo del viernes y si este día tampoco hubiese sido hábil el del jueves y así hasta llegar a la última reinversión<sup>6</sup>. La representación gráfica de los tipos EURIBOR a 6 meses se puede ver en la figura 4.

Consideramos la evolución de los valores finales de esta unidad monetaria a 6 meses, invertida el 31 de diciem-

<sup>5</sup> Capítulo IX, página 87 y siguientes.

<sup>6</sup> Tampoco tenemos en cuenta la fecha valor porque consideramos que no tiene ninguna incidencia importante, dado que sólo retardaría en dos días toda la serie tanto en la fecha de inicio como en la de vencimiento.



bre de 1998 (inversión inicial) y sus sucesivas reinversiones hasta el 30 de diciembre de 2010, venciendo ésta el 30 de junio de 2011, y, por tanto, será el último valor final, mientras que el primer valor final observado corresponde al primer vencimiento, el 30 de junio de 1999 (tercera columna en la tabla 3).

La representación gráfica del conjunto discreto de valores finales obtenidos en cada vencimiento se puede observar en la figura 5 (línea punteada); las fechas de vencimiento están expresadas en años y fracción de año.

A continuación realizamos un ajuste utilizando el método que hemos explicado en el epígrafe A9 del apéndice; las funciones bases utilizadas en la estimación son de orden 6 (grado 5) y como el número de nodos interiores es de 23, el número de *splines* será igual a 29. Los valores obtenidos en el ajuste se pueden ver en la cuarta columna de la tabla 3 y su representación gráfica en la línea continua de la figura 5.

Tal como podemos observar los valores ajustados cumplen la condición de ser crecientes en cualquier momento pero no siempre será así como podemos ver en el ajuste siguiente.

## 7.2 VALORES FINALES CON TIPOS A 1 MES

Si con el mismo criterio calculamos los valores finales con los tipos EURIBOR a 1 MES, podemos ver en la figura 7 que los valores ajustados durante los tres últimos meses de la muestra son decrecientes; en la figura 8 hemos representado los 26 últimos valores reales y ajustados y podemos comprobar, como a partir del duodécimo, los valores ajustados empiezan a comportarse de manera extraña, de forma que se logra un máximo de tres meses antes de finalizar la serie de valores observados.

## 8 AJUSTE CON FUNCIONES ESTRICTAMENTE MONÓTONAS

Cuando se encuentran con este obstáculo, Ramsay y Silverman (2005) proponen como función de ajuste, una función estrictamente monótona (creciente); para hacerlo parten de la hipótesis que si estimamos la velocidad del crecimiento, la función obtenida debe ser positiva, de forma que si de acuerdo con (29) designamos para  $x(t)$  la función suavizadora, la derivada de dicha función la hacemos igual a una exponencial natural con un exponente de la forma  $W(t)$ , es decir:

$$\frac{dx}{dt} = \exp[W(t)] \quad (30)$$

La solución se obtiene integrando los dos miembros:

$$x(t) = \beta + \int_{t_0}^t \exp[W(u)] du \quad (31)$$

Donde  $\beta$  es la constante de integración, que deberá ser estimada a partir de los datos.

La ecuación (28) que expresa el valor final del capital es en este caso:

$$x(t) = \beta_0 + \beta_1 \int_{t_0}^t \exp \left[ \int_{t_0}^u w(t) dt \right] du \quad (32)$$

Donde hemos substituido:

$C(t)$  por  $x(t)$ ;  $C(0)$  por  $\beta_0$ ;  $y(0)$  por  $\beta_1$  que evidentemente nunca puede ser nula y, finalmente, 0 por  $t_0$  con la finalidad de generalizar la solución dada por (28).

Esta es la misma ecuación que hemos obtenido en (31), substituyendo, queda:

$$W(u) = \int_{t_0}^u w(t) dt + \log \beta_1 \quad (33)$$

¿Qué papel juega la función  $w$ ?

- Supongamos que  $w(t) = 0 \quad \forall t$ ; entonces, según (32) tenemos la solución:

$$x(t) = \beta_0 + \beta_1 t$$

- Si  $w(t)$  es una constante distinta a cero, la solución (32) es:  $x(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{wt}$ . Aquí el exponente es lineal respecto al tiempo y el propio parámetro de aceleración.
- Si  $w(t)$  es una función, el comportamiento de  $x(t)$  dependerá de los valores que tome  $t$ ; por ejemplo, si está cerca de cero, su comportamiento será lineal; si  $\beta_1$  es positivo, entonces los valores positivos de  $w(t)$  implicarán, localmente, un crecimiento exponencial y si es negativo, el comportamiento de crecimiento será asintótico.

## 9 IMPLICACIONES DEL AJUSTE CON B-splines

El ajuste con *B-splines* plantea más dudas además del crecimiento estricto, que conviene resolverlas antes de adentrarnos en la estimación práctica:

- De acuerdo con la regla dada en el epígrafe A.2 del apéndice, sobre el número de grados de libertad que determina el número de funciones bases que usaremos en el ajuste, se plantea el problema que éste será siempre mayor que el número de observaciones. La pregunta que nos formulamos es: ¿Ello invalida o cuestiona de alguna forma la estimación por *B-splines*?
- ¿La estimación por **MQO** con funciones *B-spline* es correcta? O, en otras palabras, ¿Qué criterio se utiliza para determinar la bondad del ajuste?
- Hasta ahora hemos escogido como número de nodos el de las observaciones y los hemos fijado en la misma

ubicación, pero ¿la elección del número de nodos y su ubicación influye en la bondad del ajuste?

- ¿La variabilidad de la función estimada representa un obstáculo para considerar como bueno un ajuste?

### 9.1 EL SESGO DE LA ESTIMACIÓN

El método de estimación con *B-splines* consiste en encontrar los parámetros que minimicen la suma de errores al cuadrado, de forma que de la ecuación (29) de datos funcionales  $y_i = x(t_i) + \varepsilon_i$  resulta que la función a minimizar es:  $\sum [y_i - x(t_i)]^2$ .

Para valores grandes de la muestra, el sesgo de la estimación viene dado por:

$$Sesgo[\hat{x}(t)] = x(t) - E[\hat{x}(t)] \tag{34}$$

Y, cuando el tamaño de la muestra tiende a infinito, el sesgo tiende a cero.

### 9.2 LA VARIANZA DE LA ESTIMACIÓN

Una de las razones de la suavización es la de reducir la influencia del ruido sobre la variación de la función estimada  $\hat{x}$ ; por tanto, estamos interesados en que la varianza de la estimación

$$Var[\hat{x}(t)] = E\{[\hat{x}(t) - E[\hat{x}(t)]]^2\} \tag{35}$$

sea lo más pequeña posible o, como mínimo, que no sea innecesariamente grande.

### 9.3 EL ERROR CUADRÁTICO MEDIO (EQM)

Se define por la siguiente fórmula:

$$EQM[\hat{x}(t)] = E\{[\hat{x}(t) - x(t)]^2\} \tag{36}$$

Mediante esta fórmula esperamos lograr, entre otros, los mismos objetivos que con la varianza de la estimación.

### 9.4 RELACIÓN ENTRE SESGO, VARIANZA Y ERROR CUADRÁTICO MEDIO

Existe una sencilla relación entre estas tres herramientas, es:

$$EQM[\hat{x}(t)] = Sesgo^2[\hat{x}(t)] + Var[\hat{x}(t)] \tag{37}$$

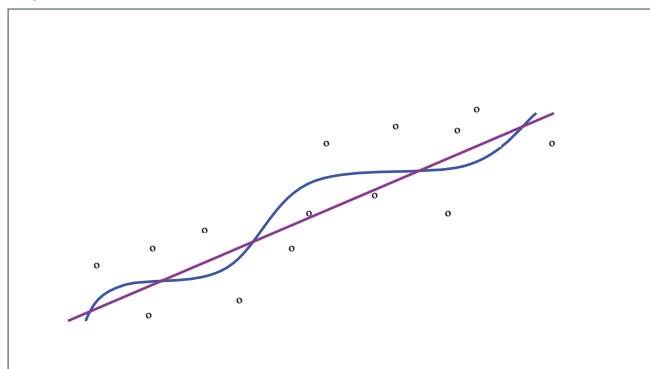
Esta relación nos muestra que si queremos reducir el sesgo, debe ser a costa de incrementar la varianza y viceversa. Ramsay y Silverman<sup>7</sup> han hecho una simulación con

10.000 muestras aleatorias y el principal resultado ha sido: *...la varianza de la muestra se incrementa rápidamente cuando utilizamos un número muy (excesivamente) grande de funciones bases, pero al mismo tiempo el cuadrado del sesgo tiende a disminuir hacia cero.* Y en el ejemplo práctico que consideran: *Vemos que los mejores resultados del error cuadrático medio (se refieren al mínimo del EQM) se obtiene cuando utilizamos entre 10 y 12 funciones bases.*

### 9.5 CUANTIFICACIÓN DE LA RUGOSIDAD (ROUGHNESS)<sup>8</sup>

Consideramos los datos representados con ° en la figura 8 y dos ajustes: uno que sigue bastante la rugosidad de las observaciones y otra estimación que es una línea recta y que sólo tiene en cuenta la tendencia y, que por tanto, ignora la variabilidad de los datos originales.

Figura 8



En general, la rugosidad de una curva se mide por el cuadrado de la derivada segunda y si queremos incorporarlo al ajuste de una función, es necesario que expresemos la rugosidad en “unidades de función” en lugar de en “unidades de derivada”, por ello hemos de calcular la integral, con lo que la medida natural de la rugosidad es:

$$PEN_2(x) = \int [x''(t)]^2 dt \tag{38}$$

Donde  $PEN_2(x)$  indica la penalización por curvatura y  $x''(t)$  la derivada segunda de la función.

### 9.6 APLICACIÓN EN LA ESTIMACIÓN MQ

En el modelo  $y = x(t) + \varepsilon$ , los estimadores MQO se obtienen minimizando la suma de errores al cuadrado:  $e'e = |y - x(t)|' |y - x(t)|$ . Esta función se penaliza de acuerdo con el valor de (38) multiplicado por un parámetro de penalización. Entonces la suma penalizada de errores al cuadrado es:

<sup>7</sup> Obra citada, pág 68.

<sup>8</sup> En los pocos manuales y artículos que he encontrado, sobre todo en español, se ha traducido por curva angulosa. Aquí hemos preferido utilizar la traducción directa de la terminología inglesa porque nos parece que recoge más fielmente lo que los autores de Boor, Ramsay y Silverman, entre muchos otros, quieren expresar.

<sup>9</sup> La explicación sobre la funcionalidad del parámetro lambda está disponible en: <http://127.0.0.1:15065/library/fda/html/smooth.basis.html>

$$\text{PENMQ}_\lambda = |y - x(t)| |y - x(t)| + \lambda \cdot \text{PEN}_2(x) \quad (39)$$

El parámetro  $\lambda$  es conocido con el nombre de parámetro de penalización<sup>9</sup>:

- Si  $\lambda$  es muy grande, la curva ajustada puede llegar a ser una línea recta, como el ejemplo de la figura 8.
- A medida que el parámetro  $\lambda$  disminuye, aumenta la rugosidad de la curva estimada y se ajusta mejor a los datos originales, pero se incrementa la variabilidad de la suavización.
- El valor atribuido al parámetro  $\lambda$  depende del valor de  $\text{PEN}_2(x)$ ; tenemos que escoger, pues, entre curvatura de la función suavizadora y error de la estimación.

Finalmente conviene tener en cuenta que la curva interpoladora no varía arbitrariamente ya que es la curva más suave, diferenciable dos veces, que mejor<sup>10</sup> se ajusta a los datos.

## 10 RESPUESTA A LAS IMPLICACIONES DEL AJUSTE CON *B-SPLINES*

En el trabajo «*Splines, knots, and penalties*», Paul H.C. Eilers i Brian D. Marx<sup>11</sup> realizan un estudio comparativo entre algunos métodos de suavización flexibles, entre los que incluyen el de las bases de las *B-splines*. A continuación resumimos las conclusiones y lo hacemos intentado seguir el orden en que hemos planteado las implicaciones del ajuste con *B-splines* en el epígrafe 11:

- El número de *B-splines* no tiene por qué ser inferior al número de observaciones siempre que los nodos estén igualmente espaciados. Este resultado ya fue demostrado teóricamente por Boor<sup>12</sup>, pero no lo verificó de forma empírica. Los autores de referencia, entre otros<sup>13</sup>, han demostrado a través de la simulación esta aseveración. En la aplicación práctica lo tendremos en cuenta y pondremos los nodos interiores igualmente espaciados. A esta distribución de los nodos, Ramsay y Silverman la denominan *fine*.
- Respecto a la estimación por **MQO** ya hemos comentado en el epígrafe anterior la necesidad de penalizarlos y, según demuestran los autores de referencia, las *B-splines* permiten una elección flexible del parámetro de penalización.
- Finalmente, queremos destacar las siguientes propiedades “absolutas” del método de suavización con *B-splines*:
  - o Tienen propiedades numéricas excelentes.
  - o Permiten información que se puede visualizar fácilmente.
  - o Las funciones bases de las *B-splines* están espaciadas

de forma que nos permiten resolver bien problemas a gran escala.

o El orden de las *B-splines* y el nivel de penalización se puede escoger de forma independiente.

Estas recomendaciones y propiedades las utilizaremos a continuación en la aplicación práctica que estamos llevando a cabo.

## 11 FACTORES DE CAPITALIZACIÓN UNITARIOS A UN MES

### 11.1 AJUSTE CON RESTRICCIÓN DE CRECIMIENTO Y PENALIZACIÓN

En la tabla 4 resumimos toda la información necesaria para empezar a realizar la suavización con restricción de crecimiento. Vemos que el número de nodos es igual al de observaciones, 133 en total; que el orden de las *splines* es 6, con lo cual el grado será igual a 5. Así nos aseguramos que la función tiene derivada continua.

Teniendo en cuenta la fórmula que hemos explicado en el apartado A.2 del apéndice, hallamos que el número de funciones bases será 137; así estamos en condiciones de aplicar lo que hemos expuesto en el epígrafe 10 para obtener una suavización de los datos que representamos conjuntamente en la figura 10: podemos ver que la curva estimada es monótona creciente sin ningún tipo de rugosidad pero que, al final, en los últimos nodos se dispara, con lo cual no quedamos satisfechos con este resultado. Además, también sucede lo mismo en los intervalos [1,2,3], [28 a 69] y [106 a 126]. Es decir, en un total de 66 nodos, los valores estimados de la suavización monótona están por encima de las observaciones, mientras que en un total de 67 nodos, las observaciones son mayores que las estimaciones. En resumen, hemos logrado una suavización creciente pero a costa de un error en la estimación excesivamente grande.

Hemos realizado otra suavización imponiendo la condición de que la función estimada sea monótona creciente con una penalización sobre la integral de la derivada segunda al cuadrado igual a 2 y un parámetro de suavización de  $\lambda = 10^{-0.5}$ . La representación gráfica que se puede ver en la figura 11 ha mejorado un poco el resultado porque el último valor estimado es 1,415774, mientras que el correspondiente en la estimación anterior era 1,434065. Sin embargo estamos lejos del valor real que es de 1,4075981.

<sup>10</sup> Ramsay y Silverman afirman “exactamente” obra citada, pág. 85.

<sup>11</sup> Publicado en 2010 con © de John Wiley & Sons, Inc. WIREs Comp Stat.

<sup>12</sup> De Boor (2001)

<sup>13</sup> Eilers & Marx (2010)

## 11.2 SUAVIZACIÓN CON PENALIZACIÓN EN LA CURVATURA

Hemos realizado una estimación por mínimos cuadrados con una penalización en la derivada segunda y un parámetro de suavización de  $\lambda = 10^{-0,01}$ . Los resultados de esta estimación que se pueden ver en la figura 12, los podemos considerar satisfactorios dado que los errores son relativamente pequeños (figura 13) y sólo empiezan a ser mayores alrededor de los nodos exteriores, pero esto es un problema genérico de la estimación con polinomios, y las *B-splines* no dejan de serlo aunque con un cierto grado de sofisticación.

## 12 LA SUAVIZACIÓN CON NODOS EQUIDISTANTES

Una vez logrado el objetivo de suavizar una serie de datos discretos, llega el momento de interpolar. Se puede llevar a cabo definiendo una sucesión de nodos interiores equidistantes, manteniendo, de todos modos, los dos nodos exteriores y los correspondientes valores de la variable que hemos estimado.

Podemos escoger cualquier cifra y en este caso hemos elegido 200 como el número total de nodos, recordemos que la denominación que utilizan Ramsay y Silverman para definir esta sucesión de nodos equidistantes es: *fine*. Así se verifica que se cumple el objetivo principal de este trabajo: conocer cuáles son los factores de capitalización intermedios cuando los periodos de capitalización son superiores al día.

### 12.1 INTERPOLACIÓN DE LOS FACTORES DE CAPITALIZACIÓN UNITARIOS

Utilizando la misma función de suavización que hemos aplicado en 13.2, hemos calculado la interpolación eligiendo un *tempfine* igual a 200 y manteniendo los dos nodos y los valores estimados por éstos. La representación gráfica se puede ver en la figura 14.

En la figura 15 se observa la representación gráfica de la velocidad del crecimiento de los factores unitarios de capitalización para la misma sucesión de nodos. Cabe destacar que a pesar de que los valores son pequeños, son siempre positivos; la velocidad de crecimiento se reduce drásticamente en los dos extremos, sobre todo al final del periodo considerado.

Y, para terminar, en la figura 16 está representada la aceleración del crecimiento de los factores de capitalización unitarios. Aquí sí que se ve claramente la reducción de la velocidad cuando los tipos de interés de la reinversión se han reducido de forma drástica.

## 13 EXTENSIONES DE LA INTERPOLACIÓN

Además, si las suavizaciones se realizan siempre con la función *smooth monotone* y con una sucesión de nodos *fine* para todos los plazos posibles superiores al día y con los mismos nodos exteriores, se pueden realizar interpolaciones de forma que para los plazos más cortos serían extrapolaciones, y ello nos permitiría hacer previsiones de los factores de capitalización unitarios a una semana, a un mes, etc., a partir de suavizaciones realizadas con plazos de tres meses, de seis meses e incluso de un año si se dispone de series lo suficientemente largas.

# TABLAS Y FIGURAS

**Tabla 1**

Puntos de inflexión aproximados de los factores de capitalización unitarios a 1 día durante el primer año.

Fechas	Tiempo	VF a 1DÍA	Derivada segunda	Forma de la curva
31-12-98	0	1		
01-01-99	0,0027397	1,0000901	0,0005412	CONVEXA
02-01-99	0,0054795	1,0001803	0,0005413	CONVEXA
03-01-99	0,0082192	1,0002704	0,0005413	CONVEXA
04-01-99	0,0109589	1,0003606	-0,0827543	CÓNCAVA
05-01-99	0,0136986	1,0004495	0,0005265	CONVEXA
06-01-99	0,0164384	1,0005385	0,0190400	CONVEXA
07-01-99	0,0191781	1,0006277	0,0005299	CONVEXA
08-01-99	0,0219178	1,0007169	0,0005299	CONVEXA
09-01-99	0,0246575	1,0008061	0,0005300	CONVEXA
10-01-99	0,0273973	1,0008954	0,0005300	CONVEXA
11-01-99	0,0301370	1,0009846	0,0005301	CONVEXA
12-01-99	0,0328767	1,0010739	-0,0179932	CÓNCAVA
13-01-99	0,0356164	1,0011628	-0,0365231	CÓNCAVA
14-01-99	0,0383562	1,0012513	-0,0365329	CÓNCAVA
15-01-99	0,0410959	1,0013392	-0,1106556	CÓNCAVA
16-01-99	0,0438356	1,0014254	0,0004946	CONVEXA
17-01-99	0,0465753	1,0015116	0,0004946	CONVEXA
18-01-99	0,0493151	1,0015979	-0,1477696	CÓNCAVA
19-01-99	0,0520548	1,0016819	-0,0736688	CÓNCAVA
20-01-99	0,0547945	1,0017648	0,0560656	CONVEXA
21-01-99	0,0575342	1,0018486	0,0375419	CONVEXA
22-01-99	0,0602740	1,0019329	0,0746297	CONVEXA
23-01-99	0,0630137	1,0020183	0,0004854	CONVEXA
24-01-99	0,0657534	1,0021038	0,0004854	CONVEXA
25-01-99	0,0684932	1,0021892	0,1302933	CONVEXA
26-01-99	0,0712329	1,0022767	0,1488727	CONVEXA
27-01-99	0,0739726	1,0023663	-0,1663912	CÓNCAVA
28-01-99	0,0767123	1,0024535	-0,0180441	CÓNCAVA
29-01-99	0,0794521	1,0025403	0,0747035	CONVEXA
30-01-99	0,0821918	1,0026283	0,0005145	CONVEXA
31-01-99	0,0849315	1,0027163	0,0005146	CONVEXA

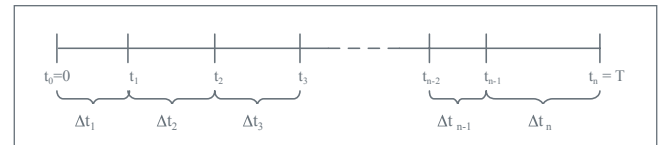
**Tabla 2**

Distribución de los puntos de inflexión durante todo el periodo de observación.

Fecha inicial	Fecha final	Observaciones	Puntos de inflexión	PI / Observaciones
01/01/99	07/09/99	250	72	29%
08/09/99	14/05/00	250	80	32%
15/05/00	19/01/01	250	82	33%
20/01/01	26/09/01	250	95	38%
27/09/01	03/06/02	250	74	30%
04/06/02	08/02/03	250	71	28%
09/02/03	16/10/03	250	73	29%
17/10/03	22/06/04	250	65	26%
23/06/04	27/02/05	250	52	21%
28/02/05	04/11/05	250	54	22%
05/11/05	12/07/06	250	48	19%
13/07/06	19/03/07	250	60	24%
20/03/07	24/11/07	250	82	33%
25/11/07	31/07/08	250	87	35%
01/08/08	07/04/09	250	104	42%
08/04/09	13/12/09	250	120	48%
14/12/09	01/01/10	19	7	37%
	<b>TOTALES</b>	<b>4019</b>	<b>1226</b>	<b>31%</b>

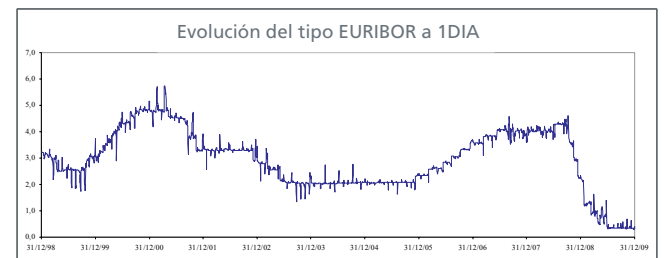
**Figura 1**

División del intervalo de integración en subintervalos parciales.



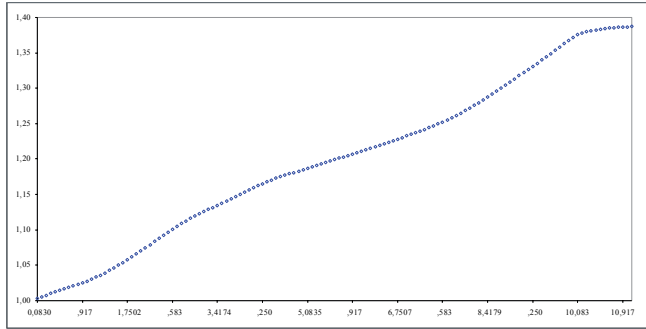
**Figura 2**

Evolución de los tipos EURIBOR a 1 día.



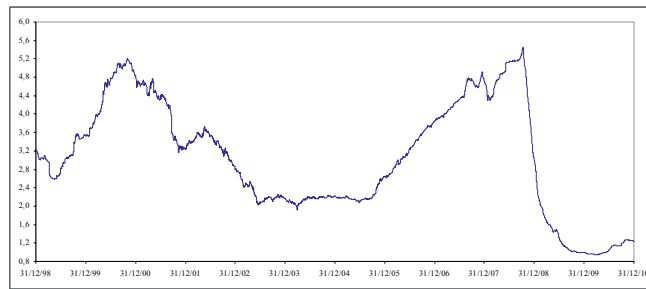
**Figura 3**

Evolución de los factores de capitalización unitarios desde enero de 2001 hasta diciembre de 2009. El tiempo está expresado en años y fracción de año.



**Figura 4**

Tipos EURIBOR a 6 meses.



**Tabla 3**

Factores de capitalización unitarios a 6 meses y su ajuste.

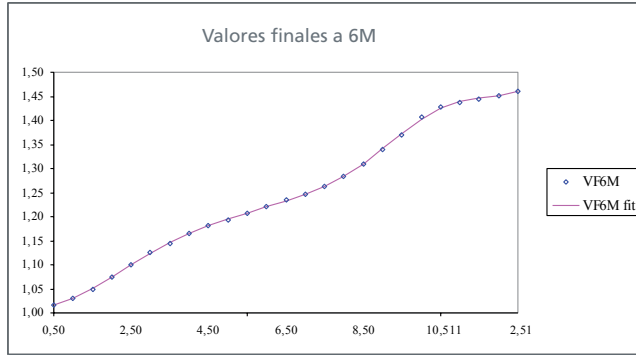
Observaciones	Tiempo	VF6M	VF6M fit
1	0,498630	1,016240	1,016215
2	1,002740	1,030840	1,030063
3	1,501370	1,049180	1,05053
4	2,005479	1,074844	1,075052
5	2,501370	1,100962	1,100152
6	3,005479	1,125570	1,124376
7	3,501370	1,143996	1,145652
8	4,005479	1,164706	1,164369
9	4,501370	1,181103	1,180269
10	5,005479	1,193786	1,194578
11	5,504110	1,206907	1,207649
12	6,008219	1,220471	1,220408
13	6,504110	1,234082	1,233118
14	7,008219	1,247315	1,247163
15	7,504110	1,263852	1,263546
16	8,008219	1,284865	1,284470
17	8,504110	1,309756	1,310212
18	9,008219	1,338642	1,340920
19	9,506849	1,370510	1,372912
20	10,010959	1,406431	1,402397
21	10,506849	1,427645	1,424616
22	11,010959	1,437291	1,438902
23	11,506849	1,444467	1,446614
24	12,010959	1,452138	1,452168
25	12,506849	1,461096	1,460349

Hay 25 observaciones (nodos); la primera y la última corresponden a los nodos exteriores; por tanto hay 23 nodos interiores. El tiempo está expresado en años y fracción de año. VF6M indica los valores logrados por una unidad monetaria invertida el 31 de diciembre de 1998 y la última cifra el valor que se logrará el 30 de junio de 2011. En la última columna están los valores finales estimados en las mismas fechas.



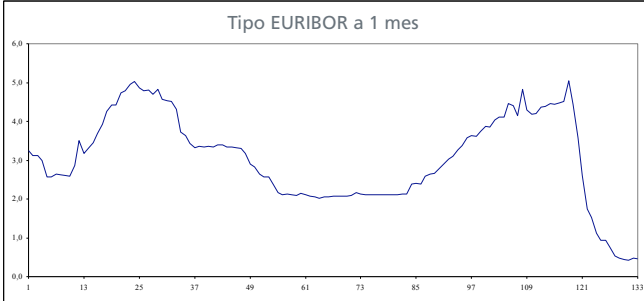
**Figura 5**

Representación de las cifras indicadas en la tabla 3. Los valores ajustados forman una curva continua porque así está especificado en las bases de las *B-splines*.



**Figura 6**

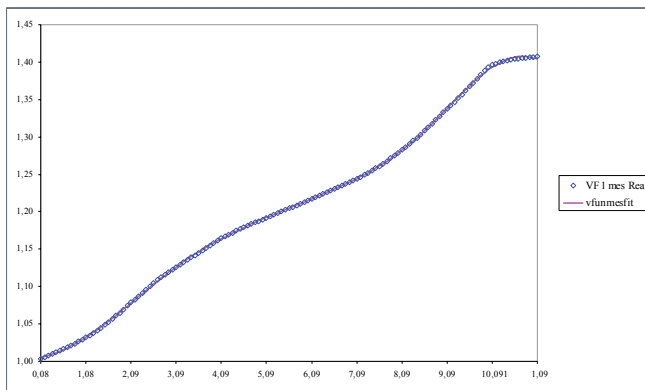
Tipos EURIBOR a 1 mes.



**Figura 7**

Valores finales reales calculados con el EURIBOR a 1MES y valores finales a 1MES estimados sin restricciones.

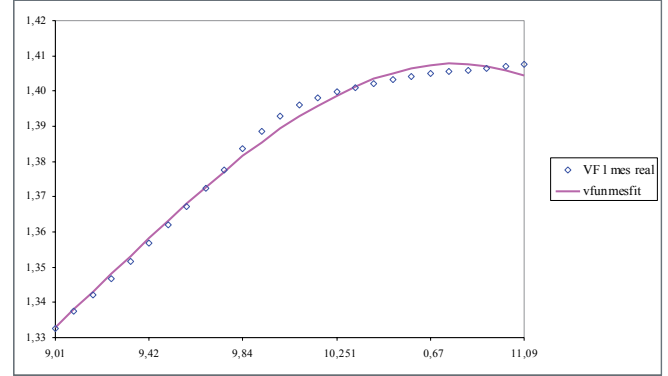
Se puede observar cómo al final del periodo la curva empieza a tener pendiente negativa, hecho que se contradice con la teoría porque los tipos, aunque sean bajos, son siempre positivos. En la figura 8 sólo hemos representado los últimos valores y se puede observar con mayor claridad el máximo así como el error cometido en la estimación.



**Figura 8**

Últimas 26 observaciones y los valores ajustados.

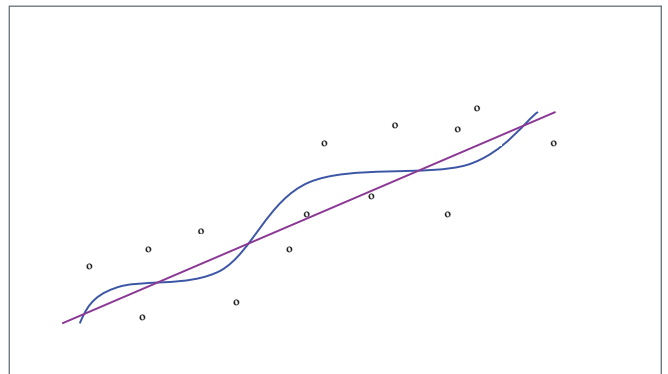
Valores finales logrados observados mensualmente con tipos EURIBOR a 1MES a partir del noveno año y la estimación con funciones *spline* sin restricciones; se puede observar cómo a medida que nos acercamos al nodo exterior (extremo por la derecha), los valores estimados se "disparan" y se alejan de los datos.



**Figura 9**

Observaciones discretas, ajuste con variabilidad alta y ajuste sin rugosidad.

Los puntos representados por  $\circ$  indican las observaciones, la curva en azul un ajuste con poca penalización por rugosidad y la línea morada un ajuste con una penalización muy alta.



#### Tabla4

Nodos, orden de las *splines*, número de funciones bases, creación de las *B-splines*, nodos interiores

```
> knots <- dadesvfunmes$temp$
> knots
[1] 0.08493 0.16164 0.24658 0.32877 0.41370 0.49589 0.58082 0.66575
[9] 0.74795 0.83288 0.91507 1.00000 1.08493 1.16438 1.24932 1.33151
[17] 1.41644 1.49863 1.58356 1.66849 1.75068 1.83562 1.91781 2.00274
[25] 2.08767 2.16438 2.24932 2.33151 2.41644 2.49863 2.58356 2.66849
[33] 2.75068 2.83562 2.91781 3.00274 3.08767 3.16438 3.24932 3.33151
[41] 3.41644 3.49863 3.58356 3.66849 3.75068 3.83562 3.91781 4.00274
[49] 4.08767 4.16438 4.24932 4.33151 4.41644 4.49863 4.58356 4.66849
[57] 4.75068 4.83562 4.91781 5.00274 5.08767 5.16712 5.25205 5.33425
[65] 5.41918 5.50137 5.58630 5.67123 5.75342 5.83836 5.92055 6.00548
[73] 6.09041 6.16712 6.25205 6.33425 6.41918 6.50137 6.58630 6.67123
[81] 6.75342 6.83836 6.92055 7.00548 7.09041 7.16712 7.25205 7.33425
[89] 7.41918 7.50137 7.58630 7.67123 7.75342 7.83836 7.92055 8.00548
[97] 8.09041 8.16712 8.25205 8.33425 8.41918 8.50137 8.58630 8.67123
[105] 8.75342 8.83836 8.92055 9.00548 9.09041 9.16986 9.25479 9.33699
[113] 9.42192 9.50411 9.58904 9.67397 9.75616 9.84110 9.92329 10.00822
[121] 10.09315 10.16986 10.25479 10.33699 10.42192 10.50411 10.58904
10.67397
[129] 10.75616 10.84110 10.92329 11.00822 11.09315

> norder <- 6
> norder
[1] 6

> nbasis <- length(knots) + norder - 2
> nbasis
[1] 137
```

#### Tabla4

continuación

```
> vfbasis <- create.bspline.basis(range(knots), nbasis, norder, knots)
> vfbasis
```

Basis object:

Type: bspline

Range: 0.08493 to 11.09315

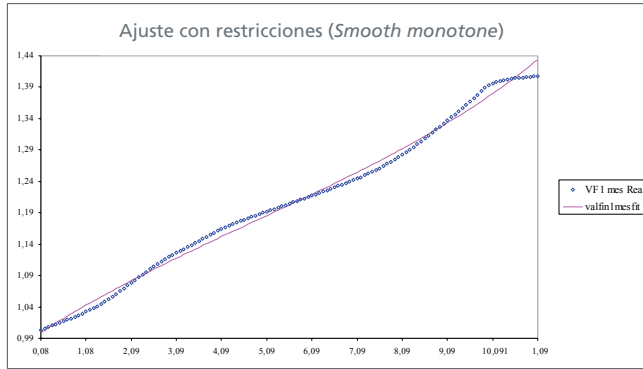
Number of basis functions: 137

Order of spline: 6

```
[1] " Interior knots"
[1] 0.16164 0.24658 0.32877 0.41370 0.49589 0.58082 0.66575 0.74795
[9] 0.83288 0.91507 1.00000 1.08493 1.16438 1.24932 1.33151 1.41644
[17] 1.49863 1.58356 1.66849 1.75068 1.83562 1.91781 2.00274 2.08767
[25] 2.16438 2.24932 2.33151 2.41644 2.49863 2.58356 2.66849 2.75068
[33] 2.83562 2.91781 3.00274 3.08767 3.16438 3.24932 3.33151 3.41644
[41] 3.49863 3.58356 3.66849 3.75068 3.83562 3.91781 4.00274 4.08767
[49] 4.16438 4.24932 4.33151 4.41644 4.49863 4.58356 4.66849 4.75068
[57] 4.83562 4.91781 5.00274 5.08767 5.16712 5.25205 5.33425 5.41918
[65] 5.50137 5.58630 5.67123 5.75342 5.83836 5.92055 6.00548 6.09041
[73] 6.16712 6.25205 6.33425 6.41918 6.50137 6.58630 6.67123 6.75342
[81] 6.83836 6.92055 7.00548 7.09041 7.16712 7.25205 7.33425 7.41918
[89] 7.50137 7.58630 7.67123 7.75342 7.83836 7.92055 8.00548 8.09041
[97] 8.16712 8.25205 8.33425 8.41918 8.50137 8.58630 8.67123 8.75342
[105] 8.83836 8.92055 9.00548 9.09041 9.16986 9.25479 9.33699 9.42192
[113] 9.50411 9.58904 9.67397 9.75616 9.84110 9.92329 10.00822
10.09315
[121] 10.16986 10.25479 10.33699 10.42192 10.50411 10.58904 10.67397
10.75616
[129] 10.84110 10.92329 11.00822
```

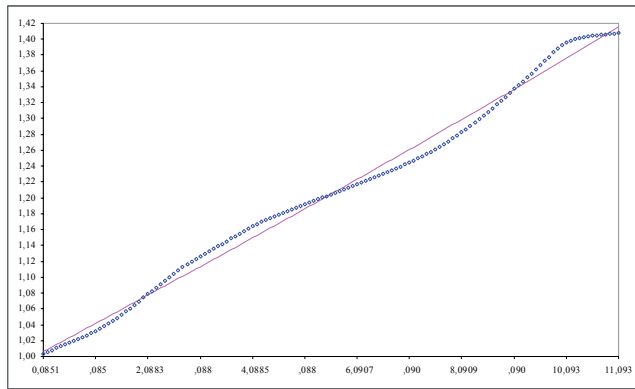
**Figura 10**

Suavización de los factores de capitalización unitarios a 1MES con la restricción de crecimiento absoluto y sin penalización por variabilidad.



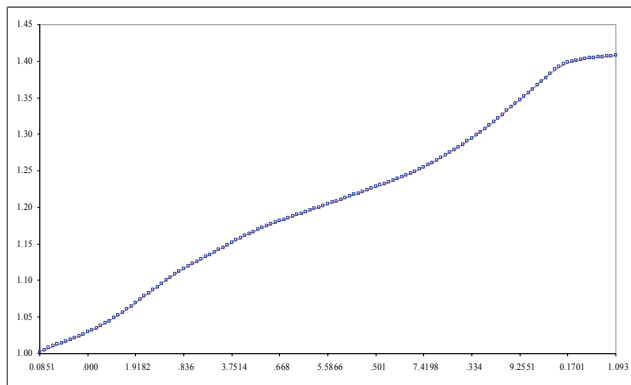
**Figura 11**

Suavización de los factores de capitalización unitarios a 1MES con la restricción de crecimiento absoluto, con un factor de penalización igual a dos y un parámetro de suavización  $\lambda = 10^{-0,5}$ .



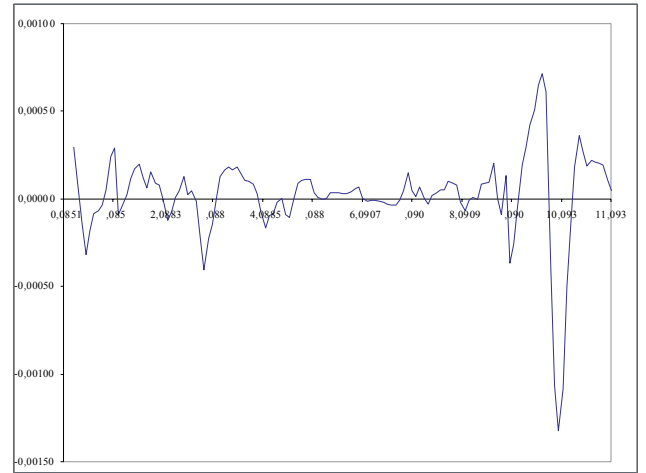
**Figura 12**

Valores reales observados y valores estimados de los factores de capitalización unitarios. La suavización se ha hecho sin restricciones de crecimiento pero con penalización en la derivada segunda con un parámetro de penalización  $\lambda = 10^{-0,01}$ .



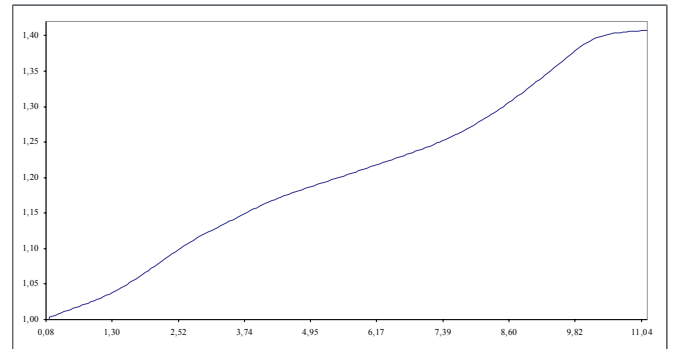
**Figura 13**

Errores de la estimación; aunque en el tramo final se disparan no llega a ser más del 1,5 por mil.



**Figura 14**

Suavización *fine* con 200 nodos manteniendo los dos nodos exteriores y sus correspondientes valores estimados.



**Figura 15**

Velocidad de crecimiento de los factores unitarios de capitalización a 1 mes calculados con la primera derivada de la función suavizadora que hemos representado en la figura 14.

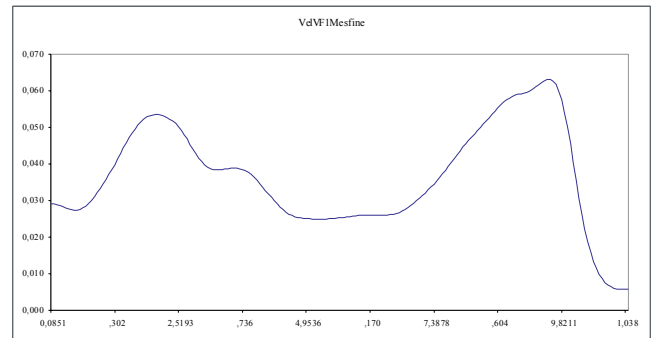
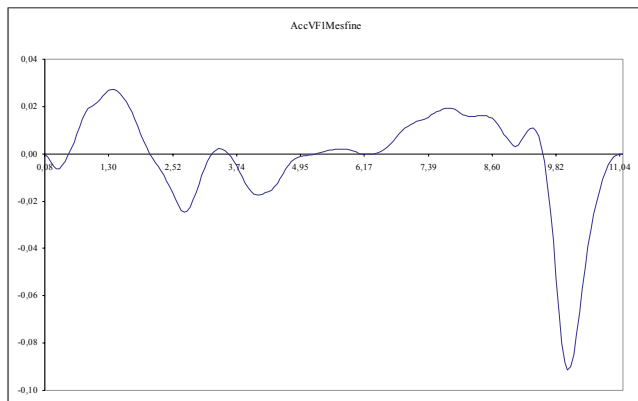


Figura 16

Aceleración del crecimiento de los factores de capitalización unitarios, calculados como la segunda derivada de las *B-splines* que dan lugar a la función suavizadora de la figura 14..



## APÉNDICE

### INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos que nos hemos planteado es hacer una interpolación cuando los periodos de capitalización son superiores a 1DÍA, de forma que nos permite comparar de manera fiable valores capitalizados en distintos periodos y con distintos tipos.

Explicamos los métodos de interpolación en un apéndice<sup>14</sup> para no interrumpir el hilo conductor que nos ha llevado hasta el estudio del crecimiento del valor final de un capital mediante el análisis de datos funcionales (FDA). Terminamos este apéndice con el método de estimación, utilizando una función *B-spline* y dejamos el resto de detalles de la estimación para el texto principal.

La palabra *spline* no tiene traducción, aquí hemos optado por utilizar la definición que se encuentra en Optimot<sup>15</sup>: **función polinómica a trozos que interpola una serie de nodos, de manera que cada trozo es un polinomio de grado  $n$  y en cada nodo los dos polinomios concurrentes tienen todas sus derivadas iguales hasta el orden  $n - 1$ .**

### A.1. EJEMPLO DE APROXIMACIÓN MEDIANTE SPLINES

Nos proponemos aproximar la curva de Gauss desde -2 hasta +2 mediante polinomios. Lo primero que tenemos que hacer es dividir el intervalo en subintervalos de igual dimensión, en este caso consideraremos cuatro subintervalos definidos de la siguiente manera:

$$(-2, -1] \quad (-1, 0] \quad (0, 1] \quad (1, 2)$$

Empezamos la aproximación con segmentos de recta, es decir, con polinomios de orden<sup>16</sup> 2 y, por tanto, de grado 1; conviene recordar que el orden de un polinomio es el número de parámetros que se han de hallar para definir el polinomio, mientras que el grado se refiere a la máxima potencia de la variable del polinomio.

En la primera gráfica de la figura A1 podemos ver la aproximación mediante segmentos de recta que vienen dados por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{6}t + \frac{1}{3} && \text{para } -2 < t \leq -1 \\ x(t) &= \frac{1}{2}t + \frac{2}{3} && \text{para } -1 < t \leq 0 \\ x(t) &= -\frac{1}{2}t + \frac{2}{3} && \text{para } 0 < t \leq 1 \\ x(t) &= -\frac{1}{6}t + \frac{1}{3} && \text{para } 1 < t < 2 \\ x(t) &= 0 && \text{para cualquier otro valor} \end{aligned}$$

(A1)

Si ahora ajustamos un polinomio de orden 3, obtendríamos con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{6} \times (2+t)^2 && \text{para } -2 < t \leq -1 \\ x(t) &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \times t^2 && \text{para } -1 < t \leq 0 \\ x(t) &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \times t^2 && \text{para } 0 < t \leq 1 \\ x(t) &= \frac{1}{6} \times (2-t)^2 && \text{para } 1 < t < 2 \\ x(t) &= 0 && \text{para cualquier otro valor} \end{aligned}$$

(A2)

La gráfica representada en la figura A2 se ajusta un poco más a la campana de Gauss, si bien aún no hemos logrado una representación lo bastante afinada.

Ahora ajustamos un polinomio de orden 4 o de grado 3 definido por las siguientes ecuaciones::

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{6} \times (2+t)^3 && \text{para } -2 < t \leq -1 \\ x(t) &= \frac{1}{6} \times (4-6t^2-3t^3) && \text{para } -1 < t \leq 0 \\ x(t) &= \frac{1}{6} \times (4-6t^2+3t^3) && \text{para } 0 < t \leq 1 \\ x(t) &= \frac{1}{6} \times (2-t)^3 && \text{para } 1 < t < 2 \\ x(t) &= 0 && \text{para cualquier otro valor} \end{aligned}$$

(A3)

<sup>14</sup> Se puede prescindir de la lectura de este apéndice si el lector es conocedor del tema que tratamos aquí.

<sup>15</sup> Optimot es un servicio de diccionario, traducción, etc. de la Generalitat de Catalunya.

<sup>16</sup> Es conveniente trabajar con el orden del polinomio en lugar del grado porque el conjunto de todos los polinomios de grado  $n-1$  no es un espacio lineal, mientras que sí lo es el conjunto de todos los polinomios de orden  $n$ . También es necesario recordar que un polinomio de orden  $n$  tiene  $n$  grados de libertad. (De Boor, 2001, pág. 1).

Ahora sí que hemos logrado una representación gráfica aproximada de la campana de Gauss (figura A3).

## A.2 NODOS Y GRADOS DE LIBERTAD

En general, el primer paso de un ajuste por *splines* consiste en dividir el intervalo  $(t_0, t_n)$  en  $L$  subintervalos mediante los puntos equidistantes o no  $(\tau_l; l = 1, 2, \dots, L-1)$ ; con ello los intervalos son:  $(t_0 = \tau_0, \tau_1], (\tau_1, \tau_2], \dots, (\tau_{L-1}, \tau_L = t_n)$ .

En ejemplos contruidos para ilustrar lo que se demuestra, se toman los intervalos iguales y no tenemos ningún problema, pero cuando se trata de observaciones que se han obtenido en intervalos desiguales, es cuando se demuestra la fiabilidad del análisis funcional de datos que nos permite hacer **particiones uniformes** o como dice de Boor (2001) *good meshes*.<sup>17</sup>

Los dos extremos del intervalo total y todos los puntos utilizados para definir los intervalos se designan con el nombre de **nodos**<sup>18</sup>;  $t_0$  y  $t_n$  son los **nodos exteriores** y los que hemos utilizado para definir los intervalos son **nodos interiores**.

En el ejemplo de la campana de Gauss, el número total de nodos es  $L = 5$  de los cuales dos son exteriores: -2 y 2, y el resto son nodos interiores: -1, 0 y 1.

La gráfica A1 corresponde a polinomios ajustados de orden 2 y grado 1: son segmentos de líneas rectas; la gráfica A2 es una representación gráfica de polinomios ajustados de orden 3 y de grado 2. En realidad son segmentos de parábolas de segundo grado. Finalmente, la figura A3 corresponde a la representación gráfica de polinomios ajustados de orden 4 y grado igual a 3, son segmentos de parábolas cúbicas. Es evidente, pues, que a medida que incrementamos el orden (y consecuentemente el grado) de los polinomios, se aumenta la bondad del ajuste.

Para definir un segmento de línea recta, tenemos dos grados de libertad, tantos como el orden del polinomio y, por tanto, con los cuatro segmentos de línea recta disponemos de 8 grados de libertad (4 rectas para 2 coeficientes), pero debido a que queremos que la función *spline* resultante sea continua perdemos tres de ellos, uno por cada vértice, lo que nos da un total neto de 5 grados de libertad.

En el caso de la *spline* de orden 3, disponemos de 3 grados de libertad para cada uno de los cuatro polinomios, eso es un total de 12 (3 para 4 polinomios), pero en este caso al ser la función *spline* es continua y diferenciable en cada

uno de los 3 vértices, perdemos 3 grados por continuidad y 3 por diferenciable, en total 6, que restados de los 12 que teníamos, da un neto de 6 grados de libertad.

Con el mismo cálculo, en la *spline* de orden 4, tenemos 4 grados de libertad por cuatro polinomios que da un total de 16, perdiendo 3 con la condición de continuidad, 3 en la derivada primera y 3 en la derivada segunda, eso da un total de 9, que restados de los 16 iniciales, resulta un neto de 7 grados de libertad. La tabla A1 resume los cálculos:

<sup>17</sup> En las aplicaciones prácticas, la primera estimación, la haremos con las observaciones tal como vienen; para la interpolación utilizaremos intervalos iguales.

<sup>18</sup> Estrictamente hablando deberíamos hablar de puntos de ruptura o puntos de control; de todas formas si los nodos no son coincidentes como ocurre en todas las aplicaciones prácticas que hacemos aquí es correcto utilizar esta terminología (Ramsay & Silverman (pág. 48 y 49).

Tabla A1

Orden	Número de polinomios	Clase 0	Clase 1	Clase 2	Grados de libertad netos
2	4	3	-	-	$(2 \times 4) - 3 = 5$
3	4	3	3	-	$(3 \times 4) - 3 - 3 = 6$
4	4	3	3	3	$(4 \times 4) - 3 - 3 - 3 = 7$

Otra forma de contar grados de libertad remanentes consiste en sumar al orden el número de nodos interiores, resultando:

Tabla A2

Orden del polinomio	Nodos interiores	Grados de libertad
2	3	$2 + 3 = 5$
3	3	$3 + 3 = 6$
4	3	$4 + 3 = 7$

Vemos que cuando incrementamos el orden, obtenemos una mejor aproximación, de forma que para el orden 4 la aproximación es tan buena que incluso las derivadas de segundo orden son continuas, tal y como se puede comprobar en la tercera de las gráficas y también a partir de los valores que toman las derivadas segundas en los nodos interiores:

Tabla A3

Derivadas segundas	Nodos interiores	Límites por la izquierda	Límites por la derecha
$x''(t) = 2 + t$	-1	--	$x''(-1) = 1$
$x''(t) = -2 - 3t$	-1	$x''(-1) = 1$	--
$x''(t) = -2 - 3t$	0	--	$x''(0) = -2$
$x''(t) = -2 + 3t$	0	$x''(0) = -2$	--
$x''(t) = -2 + 3t$	1	--	$x''(1) = 1$
$x''(t) = 2 - t$	1	$x''(1) = 1$	--

Es evidente que para lograr *splines* más flexibles no tenemos otra opción que:

- I. incrementar el orden de los segmentos de los polinomios y/o
- II. incrementar el número de nodos no coincidentes.

Respecto a la primera de las dos posibilidades ya sabemos la complejidad de cálculo cuando utilizamos polinomios de orden quinto y superior.

Respecto a la segunda, sólo cabe decir que si disponemos de  $N$  datos, que pueden ser centenares o miles de observaciones, y a cada cual le asignamos un nodo interior, tendríamos  $N-2$  nodos interiores. Tenemos que buscar, pues, un método que simplifique el número de operaciones y que a la vez sea flexible.



**EJEMPLO A.2**

Nos proporcionan los datos siguientes de valoración de una inversión en momentos equidistantes de tiempo:  $C(t_0) = 100$ ;  $C(t_1) = 103$ ;  $C(t_2) = 107$ ;  $C(t_3) = 108$ .

Queremos hacer una interpolación polinómica utilizando la fórmula de Newton:

$$p_n(t) = a_1 + a_2(t-t_0) + a_3(t-t_0)(t-t_1) + \dots + a_n(t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_{n-1}) \quad (A4)$$

El orden de este polinomio es  $n$  y, por tanto, su grado es:  $n-1$ .

En el caso del ejemplo, el polinomio será de orden 4 porque disponemos de cuatro datos. Así, el sistema de ecuaciones que formaremos para resolverlo respecto a las incógnitas será compatible y determinado. El polinomio es:

$$p_4(t) = a_1 + a_2[t-t_0] + a_3[t-t_0][t-t_1] + a_4[t-t_0][t-t_1][t-t_2]$$

Dado que los intervalos de tiempo son iguales, los podríamos tomar como unidad de medida:  $t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = 1$ , y, por tanto, tendríamos  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $t_3 = 3$ .

Substituyendo sucesivamente la ecuación (A4), obtenemos los siguientes valores para los parámetros  $a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$ :

$$\begin{aligned} p_4(0) &\equiv C(0) \equiv a_1 = 100 \\ p_4(1) &\equiv C(1) \equiv 103 = 100 + a_2(1-0) \Rightarrow a_2 = 3 \\ p_4(2) &\equiv C(2) \equiv 107 = 100 + 3 \times (2-0) + a_3 \times (2-0) \times (2-1) \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2} \\ p_4(3) &\equiv C(3) \equiv 108 = 100 + 3 \times 3 + \frac{1}{2} \times 3 \times (3-1) + a_4 \times 3 \times (3-1) \times (3-2) \Rightarrow a_4 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

El polinomio que buscamos es:

$$p_4(t) \equiv C(t) = 100 + 3t + \frac{1}{2}t(t-1) - \frac{2}{3}t(t-1)(t-2)$$

O, bien:

$$C(t) = 100 + \frac{7}{6}t + \frac{5}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3$$

**A.3 GENERALIZACIÓN:****LA FÓRMULA DE INTERPOLACIÓN DE NEWTON<sup>19</sup>**

El polinomio interpolador de Newton se puede generalizar fácilmente para cualquier conjunto de puntos y orden del polinomio.

De esta manera si queremos aproximar la función  $f(x)$  mediante un polinomio de orden  $n$ , escribiremos la expresión:

$$p_n(x) = a_1 + a_2(x-x_0) + a_3(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-2}) \quad (A5)$$

Dado que el polinomio es de orden  $n$ , el grado del polinomio que corresponderá a la potencia mayor será  $n-1$ .

Designando para  $f_0 = f(x_0), f_1 = f(x_1), \dots, f_k = f(x_k), \dots$ , los puntos de la función  $f(x)$  por los que tiene que pasar el polinomio  $p_n(x)$ , los coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$  se pueden encontrar fácilmente, tal como podemos ver a continuación.

Si disponemos de una única observación  $f_0$  el polinomio es de orden 1 (grado 0), queda reducido a una constante que podemos encontrar substituyendo  $x$  por  $f_0$  en la expresión (A2), Y resulta:

$$p_1(x_0) = a_1 = f_0 \quad (A6)$$

Si disponemos de dos puntos  $f_0$  i  $f_1$ , el polinomio es de orden 2 (o grado 1):

$$p_2(x) = a_1 + a_2(x-x_0)$$

Teniendo en cuenta que conocemos  $p_1(x_0) = a_1 = f_0$ , queda:

$$p_2(x_1) = a_1 + a_2(x_1-x_0) \Rightarrow a_2 = \frac{p_2(x_1) - a_1}{x_1 - x_0} = \frac{p_2(x_1) - p_1(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \quad (A7)$$

Podemos establecer la ley de recurrencia para un polinomio de orden 2:

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x-x_0)$$

También para un polinomio de orden 3:

$$p_3(x) = p_2(x) + a_3(x-x_0)(x-x_1) = p_2(x) + a_3 \prod_{j=0}^1 (x-x_j)$$

Y para cualquier polinomio de orden  $k$ :

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + a_k(x-x_0)\dots(x-x_{k-2}) = p_{k-1}(x) + a_k \prod_{j=0}^{k-2} (x-x_j) \quad (A8)$$

Para encontrar el valor del coeficiente  $a_k$  del último polinomio (A8) hemos de substituir  $x$  por  $x_{k-1}$  y resulta:

$$p_k(x_{k-1}) = p_{k-1}(x_{k-1}) + a_k \prod_{j=0}^{k-2} (x_{k-1} - x_j) \quad (A9)$$

Despejando  $a_k$  y teniendo en cuenta que  $p_k(x_{k-1}) = f_{k-1}$ :

$$a_k = \frac{f_{k-1} - p_{k-1}(x_{k-1})}{\prod_{j=0}^{k-2} (x_{k-1} - x_j)} \quad (A10)$$

<sup>19</sup> Se puede consultar: Conde, C., Hidalgo, A. y López, A. 2007 "Interpolación polinómica", Universidad Politécnica de Madrid.

<sup>20</sup> De Boor (2001) lo llama *sites*; Ramsay y Silverman (2005), *breakpoints*; Conde, Hidalgo y López (2007) y Paluszny, Prautzsch y Boehm (2002), puntos de control.

<sup>21</sup> La demostración se puede ver en de Boor pág. 4.

<sup>22</sup> Cuando escribimos  $p_2(x_i) = f(x_0, x_i)$  queremos indicar que el polinomio de orden 2 es una función discreta, evaluada exclusivamente en los puntos  $x_0$  i  $x_i$ . Vale también para el resto de polinomios.

### A.3.1 PROPIEDADES

- En los cálculos sucesivos de los coeficientes del polinomio hemos visto que  $a_k$  depende de todos los puntos:  $x: x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  por ello se puede afirmar que  $a_k$  es una función de los puntos<sup>20</sup> anteriores al  $x_k$  que toma la variable independiente  $x$ .
- Los valores de los parámetros  $a_1, \dots, a_k$  dependen de los argumentos  $x: x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  pero no dependen del orden en que se hayan tomado, porque el polinomio interpolador depende sólo de los datos y no del orden<sup>21</sup>.
- Si añadimos una observación  $x_k$ , todos los cálculos precedentes nos sirven y tenemos que el coeficiente de la potencia añadida al polinomio es:

$$a_{k+1} = \frac{f_k - p_k(x_k)}{\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)} \quad (\text{A8})$$

### A.3.2 CONTINUACIÓN EJEMPLO A3

En los datos del ejemplo (A.2), nos proporcionan una nueva observación:  $C(4) = 112$ ; para poder aplicar la fórmula (A8), hemos de calcular el valor del polinomio  $p_k(x_k)$ , con  $k = 4$  y  $x_4 = 4$ , se obtiene:

$$p_4(4) = 100 + 3 \times 4 + \frac{1}{2} \times 4(4-1) - \frac{2}{3} \times 4(4-1)(4-2) = 102$$

Substituyendo a (B10) y teniendo en cuenta que  $f_4 = C(4) = 112$ , resulta:

$$a_5 = \frac{f_4 - p_4(x_4)}{\prod_{j=0}^3 (4 - x_j)} = \frac{112 - 102}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{5}{12}$$

Y, el polinomio de orden 5 que aproxima la función  $C(t)$ , es:

$$p_5(t) \equiv C(t) = 100 + 3t + \frac{1}{2}t(t-1) - \frac{2}{3}t(t-1)(t-2) + \frac{5}{12}t(t-1)(t-2)(t-3)$$

### A.4 DIFERENCIAS DIVIDIDAS Y EL POLINOMIO DE NEWTON

Dada una función  $f(x)$  evaluada exclusivamente en los puntos discretos:

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}$$

En los cuales toma los valores:

$$f_0 = f(x_0), f_1 = f(x_1), f_2 = f(x_2), \dots, f_i = f(x_i), \dots, f_{n-2} = f(x_{n-2}), f_{n-1} = f(x_{n-1})$$

Nos piden que calculemos el polinomio interpolador de Newton:

$$p_n(x) = a_1 + a_2(x - x_0) + a_3(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-2})$$

Los coeficientes se calculan aplicando las fórmulas que ya hemos deducido antes y que son:

$$p_1(x_0) = a_1 = f(x_0)$$

$$a_2 = \frac{p_2(x_1) - p_1(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (\text{A11})$$

Pero, dado que  $p_2(x_1)$  es una función de  $x_0$  y de  $x_1$ , podemos substituirlo por  $p_2(x_1) = f(x_0, x_1)$ <sup>22</sup>; entonces tenemos:

$$a_2 = \frac{p_2(x_1) - p_1(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0, x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (\text{A12})$$

Para  $a_3$ :

$$a_3 = \frac{p_3(x_2) - p_2(x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f(x_0, x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad (\text{A13})$$

Y, en general, según (A7):

$$a_k = \frac{f_{k-1} - p_{k-1}(x_{k-2})}{\prod_{j=0}^{k-2} (x_{k-1} - x_j)} = \frac{f(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) - f(x_0, x_1, \dots, x_{k-2})}{\prod_{j=0}^{k-2} (x_{k-1} - x_j)} \quad (\text{A14})$$

Respecto a lo que acabamos de realizar, tenemos que señalar lo siguiente:

- En las fórmulas de (A12) a (A14) hemos substituido el valor del polinomio de orden  $k$ :  $p_k(x_{k-1})$  por la expresión escrita más explícita  $f(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1})$  y el del polinomio de orden  $k-1$ :  $p_{k-1}(x_{k-1})$  por:  $f(x_0, x_1, \dots, x_{k-2})$ , con el fin de poner de manifiesto los parámetros que intervienen en el cálculo de los coeficientes del polinomio interpolador.

### A.5 DEFINICIÓN DE DIFERENCIA DIVIDIDA

Llamamos diferencia dividida (*d.d.*) de orden  $k$  de la función  $f(x)$  evaluada exclusivamente en los  $k$  puntos discretos  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}$ , a la expresión:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}) - f(x_0, x_1, \dots, x_{k-2})}{(x_{k-1} - x_0)} \quad (\text{A15})$$

Las diferencias divididas (*d.d.*) de primer orden son:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}, \dots, f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}, \dots, f(x_{i+1}, x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})}, \dots \quad (\text{A16})$$

Mientras que las *d.d.* de segundo orden se obtienen de la expresión:

$$f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}, x_i) - f(x_i, x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})} \text{ desde } i \text{ igual a } 1 \text{ hasta } (k-1) \quad (\text{A17})$$

En la tabla A5 hemos desarrollado las *d.d.* de una función de orden  $n$ . Como podemos observar sólo se obtiene una

diferencia dividida de orden  $n-1$ , por tanto, todas las *d.d.* de orden posterior son iguales a cero.

### A.5.1 CONSECUENCIAS DE LA DEFINICIÓN:

Vemos que en la primera fila de la tabla se encuentran calculados los coeficientes del polinomio interpolador de Newton, que ahora quedaría escrito de la siguiente forma:

$$p_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})(x - x_0) \dots (x - x_{n-2})$$

siendo:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}) - f(x_0, \dots, x_{k-2})}{x_{k-1} - x_0} = a_k \quad \text{para } \forall k = 0, 1, \dots, n \quad (\text{A18})$$

### EJEMPLO A.4

Si aplicamos el concepto *d.d.* en el ejemplo de la interpolación de un polinomio al valor final de un capital, vemos que en la primera fila de la tabla A4 aparecen todos los coeficientes del polinomio que hemos podido calcular de forma muy sencilla.

### A.6 LA FORMA DE LA CURVA Y LAS DIFERENCIAS DIVIDIDAS DE UNA FUNCIÓN

Cuando hemos querido saber la forma de la curva de crecimiento del valor final de un capital, hemos utilizado una expresión aproximada que nos proporciona la concavidad o convexidad de una función en un intervalo de tiempo: la fórmula es:

$$C''(t_i) \approx \frac{\frac{C(t_{i+1}) - C(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \frac{C(t_i) - C(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (\text{A19})$$

Teniendo en cuenta que  $\frac{C(t_i) - C(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$  y  $\frac{C(t_{i+1}) - C(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$

son las *d.d.* primeras de la función  $C(t_i)$ , ( $i = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n-2$ ), las podemos substituir por las expresiones (A16), resultando:

$$C''(t_i) \approx \frac{C(t_{i+1}, t_i) - C(t_i, t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (\text{A20})$$

Fórmula que corresponde a la expresión general de las diferencias divididas de segundo orden de la función  $C(t)$ .

A medida que incrementamos el orden de las *d.d.* aumenta el grado del polinomio interpolador y, en consecuencia, mejora la calidad del ajuste a la función. Como se puede disponer de un algoritmo de cálculo sencillo y de fácil implementación informática, esta tarea queda parcialmente resuelta; sólo nos falta poder escoger las funciones *splines* de una forma directa y segura.

### A.7 DIFERENCIAS DIVIDIDAS DEL MONOMIO $(t-x)^{k-1}$

Tomando como función el monomio  $(t-x)^{k-1}$ , calculamos las diferencias divididas hasta el orden  $k$  para la sucesión monótona creciente de nodos de  $t: (t_j, t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_{j+k-1}, t_{j+k})$ , las diferencias primeras son:

$$\frac{(t_{j+1} - x)^{k-1} - (t_j - x)^{k-1}}{t_{j+1} - t_j} = f(t_j, t_{j+1})$$

$$\frac{(t_{j+2} - x)^{k-1} - (t_{j+1} - x)^{k-1}}{t_{j+2} - t_{j+1}} = f(t_{j+1}, t_{j+2})$$

⋮

$$\frac{(t_{j+k-1} - x)^{k-1} - (t_{j+k-2} - x)^{k-1}}{t_{j+k-1} - t_{j+k-2}} = f(t_{j+k-2}, t_{j+k-1})$$

$$\frac{(t_{j+k} - x)^{k-1} - (t_{j+k-1} - x)^{k-1}}{t_{j+k} - t_{j+k-1}} = f(t_{j+k-1}, t_{j+k}) \quad (\text{A21})$$

Las diferencias divididas de segundo orden son:

$$\frac{f(t_{j+1}, t_{j+2}) - f(t_j, t_{j+1})}{t_{j+2} - t_j}$$

⋮

$$\frac{f(t_{j+k-1}, t_{j+k}) - f(t_{j+k-2}, t_{j+k-1})}{t_{j+k} - t_{j+k-2}} \quad (\text{A22})$$

Finalmente, la única diferencia de orden  $k$  es:

$$\frac{f(t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_{j+k}) - f(t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+k})}{t_{j+k} - t_j} \quad (\text{A23})$$

### A.8 DEFINICIÓN DE B-SPLINE

- Se define la  $j$ -ésima *B-spline* de orden  $k$  para la sucesión monótona creciente de nodos de  $t: (t_j, t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_{j+k-1}, t_{j+k})$  mediante la fórmula:

$$B_{j,k,t}(x) = (t_{j+k} - t_j) \cdot [f(t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_{j+k}) - f(t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+k-1})] \quad (\text{A19})$$

- Donde  $[f(t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_{j+k}) - f(t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+k-1})]$  es el numerador de (A18), que es la diferencia dividida de orden  $k$  de la función.
- Para valores que no pertenecen a la sucesión que define  $t$ , el valor de la *B-spline* es cero.

Esta es la definición de una **base de splines** o una **B-spline**, de acuerdo con la terminología utilizada por de Boor pág. 87, aunque él cita a Curry-Schoenberg (1947) como los primeros autores que la definen.

### A.8.1 PROPIEDADES DE LAS B-SPLINE

1) Aquí hemos preferido definir las *B-spline* a partir del concepto de diferencias divididas de una función, para poner de manifiesto la facilidad de cálculo de los coeficientes de los polinomios interpoladores. Entonces no tiene importancia la cantidad de observaciones que dispongamos (centenares, miles, etc.), porque los cálculos del polinomio interpolador se simplifican extraordinariamente.

2) También se pone de manifiesto la transición suave de una *spline* al siguiente y que dependiendo del grado de la base de *splines* que tomemos, dicha transición suave se puede extender a las derivadas primeras, segundas, etc.

3) Se puede definir la base de *splines* a partir de la fórmula de recurrencia, teniendo en cuenta que una *B-spline* de orden 1 está formada por segmentos de rectas paralelas al eje de abscisas para todos los valores de  $t$  y cero en el resto; las *B-spline* de orden 2 son segmentos de rectas, etc. Pero es más cómodo hacerlo con diferencias divididas para facilitar los cálculos y quizás también la comprensión.

4) Teniendo en cuenta que la suma algebraica de *splines* es también una *spline* y que la combinación lineal de *splines* es una *spline*, una combinación lineal de *B-splines* es también una *spline* que se denomina **función spline**. (de Boor pág. 93).

5) Si bien hay muchos métodos para construir estas bases de *B-splines*, el sistema desarrollado por de Boor (2001) es el más popular. El código para trabajar con *B-splines* está disponible en un amplio rango de lenguajes de programación, incluyendo R<sup>23</sup> *S-PLUS*<sup>®</sup> i *MATLAB*<sup>®</sup>. Tal como veremos más adelante, hemos utilizado los programas en R, porque es un programa de uso libre, donde están disponibles todos los paquetes necesarios para llevar a cabo los cálculos pertinentes. (Ramsay y Silverman (2005) pág. 49).

### A.9 ESTIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS (MQO) CON UNA FUNCIÓN B-SPLINE

A pesar de que sea muy conocida la fórmula de aplicación de los MQO es conveniente hacer una pequeña introducción, sobre todo para introducir algunos conceptos como:

- La determinación del grado de las *B-splines*.
- La función *B-spline* que será el estimador.
- El número de funciones bases que forma parte de la función de estimación.

Si disponemos de  $n$  observaciones, la ecuación (29) se puede escribir en forma matricial:

$$y = \mathbf{x}(t) + \varepsilon \text{ donde } y, \mathbf{x}(t), \varepsilon \text{ son vectores columna de orden } n \quad (\text{A21})$$

La función que tomamos como estimador de  $\mathbf{x}(t)$  es una **función spline**, de acuerdo con la propiedad 4) del epígrafe B.8.1, que se puede escribir:

$$x(t) = \sum_k c_k B_k(t)$$

$$\begin{bmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \vdots \\ x(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(t_1) & B_2(t_1) & \dots & B_K(t_1) \\ B_1(t_2) & B_2(t_2) & \dots & B_K(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_1(t_n) & B_2(t_n) & \dots & B_K(t_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$$

(A22)

O bien, abreviadamente:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{c}$$

(A23)

Donde  $\mathbf{B}$  es la matriz de orden  $n \times K$  formada por *B-splines*, siendo  $K$  el número de *B-splines* contenidas en la función suavizadora.

Substituyendo (A23) en (A21), resulta:

$$y = \mathbf{Bc} + \varepsilon$$

(A24)

Es preciso recordar que los errores deben ser independientes de  $y$ , además tienen que estar idénticamente distribuidos; si no estuviesen idénticamente distribuidos, deberíamos conocer la matriz de varianzas de los errores y aplicarle mínimos cuadrados ponderados.

Para obtener los estimadores MQO de (A24) hemos de encontrar el vector de parámetros  $\mathbf{c}$  que minimiza la suma de errores al cuadrado:  $\varepsilon'\varepsilon$ ; si calculamos, pues, la derivada de  $\varepsilon'\varepsilon$  la igualamos a cero y resolvemos la ecuación (matricial), resultando:

$$\hat{y} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{c}} = (\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}'y$$

(A25)

Es la conocida fórmula de los estimadores MQO, pero recordando una vez más que  $\mathbf{B}$  una matriz formada por *B-splines*.

- El grado de las *B-splines* depende de las condiciones que impongamos a las *splines*; como aquí estamos interesados en el comportamiento, es decir, el crecimiento y decrecimiento así como la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión, de la función de aceleración  $w(t)$ , necesitamos hasta la derivada tercera de ésta. Y teniendo en cuenta que la aceleración es la derivada segunda del valor final del capital  $C(t)$  resulta que el grado de las *B-splines* es de 5, con lo que el orden será de 6.
- El suavizador es una función *B-spline* que se construye

<sup>23</sup> Los cálculos necesarios para encontrar las *B-splines* y otros instrumentos estadísticos y computacionales utilizados en este trabajo se han realizado con el programa de libre acceso: R Foundation for Statistical Computing, Viena, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.

a partir de la combinación lineal de *B-splines* de orden 6 en nuestro caso.

- El número de *B-splines* o bases de *splines* necesarias para definir el suavizador viene dado, según hemos demostrado en el epígrafe A.2 de este apéndice, por el número de nodos interiores más el orden; si hay 23 nodos interiores y el orden es 6, el número de *B-splines* es 29.

# TABLAS Y FIGURAS DEL APÉNDICE

Tabla A4

	Función	Diferencias divididas de primer orden	Diferencias divididas de segundo orden	Diferencias divididas de tercer orden
0	$f(0) = 100$	$f(0,1) = \frac{103-100}{1-0} = 3$	$f(0,1,2) = \frac{4-3}{2-0} = \frac{1}{2}$	$f(0,1,2,3) = \frac{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{3-0} = -\frac{2}{3}$
1	$f(1) = 103$	$f(1,2) = \frac{107-103}{2-1} = 4$	$f(1,2,3) = \frac{1-4}{3-1} = -\frac{3}{2}$	
2	$f(2) = 107$	$f(2,3) = \frac{108-107}{3-2} = 1$		
3	$f(3) = 108$			

Tabla A5

Diferencias divididas de una función de orden  $n$

Puntos	Valores de la función	Diferencias divididas de primer orden	Diferencias divididas de segundo orden		Diferencias divididas de orden $n-1$
$x_0$	$f(x_0) = a_1$	$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = a_2$	$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = a_3$	...	$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{f(x_1, \dots, x_{n-1}) - f(x_0, \dots, x_{n-2})}{x_{n-1} - x_0} = a_n$
$x_1$	$f(x_1)$	$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$	$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}$	...	
$x_2$	$f(x_2)$	$f(x_2, x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$		...	
...	...	...			
$x_{n-2}$	$f(x_{n-2})$	$f(x_{n-2}, x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}$		...	
$x_{n-1}$	$f(x_{n-1})$				



Figura A1

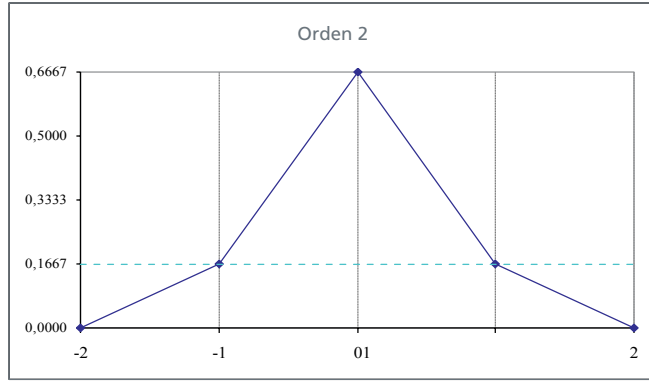


Figura A2

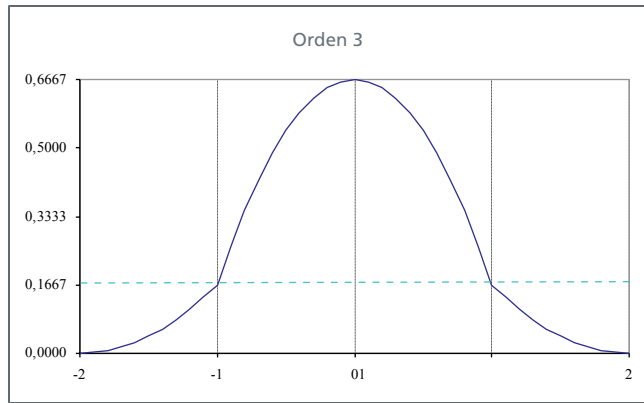
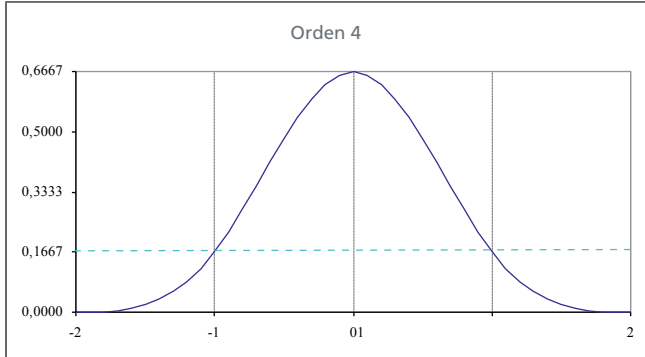
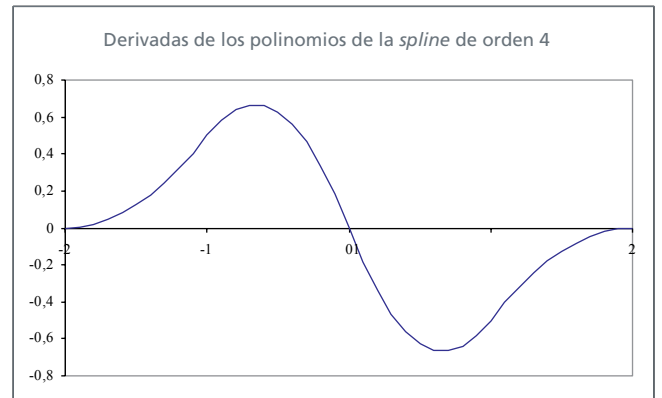
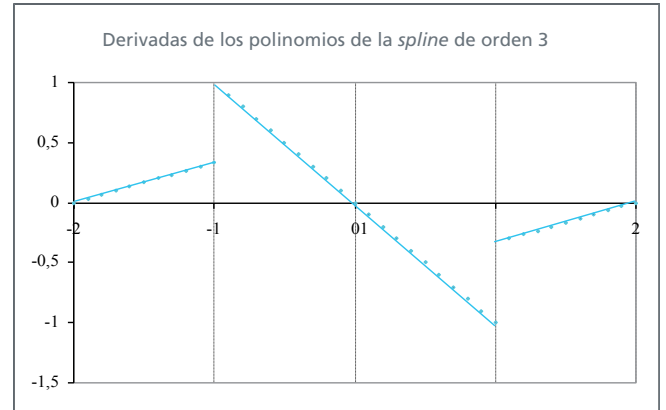
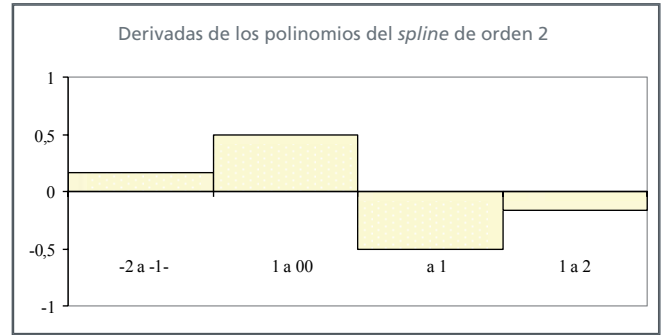


Figura A3



Figuras A4, A5 y A6



## CONCLUSIONES Y PROLONGACIÓN DEL TRABAJO

En las páginas que preceden a estas conclusiones hemos puesto de manifiesto que la aplicación del análisis de datos funcionales (fda) en el crecimiento del valor final de un capital es posible y que, además, se fortalecen los principios básicos de la matemática financiera en el sentido que no sólo tenemos en cuenta el crecimiento estricto, sino que vemos como éste se produce a lo largo del tiempo mediante la introducción de la velocidad y la aceleración del crecimiento. Es decir, nos hemos librado del requerimiento de crecimiento uniforme y/o constante del valor final de un capital.

Este primer trabajo tiene como limitación el plazo temporal de los tipos de interés elegidos, dado que no hemos considerado tipos de periodicidad superior al año y también que todos los tipos considerados son al contado.

Como tarea futura inmediata nos proponemos ampliar el estudio en una doble vertiente: por un lado, considerar tipos a plazo y ver la relación que existe (si es que realmente existe) entre los tipos al contado y los tipos *forward*, y del otro, incluir en el análisis el comportamiento de los tipos cupón cero.

En esta última aplicación pensamos que el análisis de datos funcionales juega un papel muy importante, en el sentido que puede proporcionar interpolaciones precisas sobre todo si tenemos en cuenta que los plazos que cotizan en el mercado al contado son largos y muy espaciados en el tiempo.

## BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

- Conde, C., Hidalgo, A. & López, A. *Interpolación polinómica*. Publicación lectiva de la asignatura Programación y métodos numéricos. Ed: Universidad Politécnica de Madrid, 2007.
- Craven, P. & Wahba, G. «Smoothing Noisy Data with Spline Functions». *Numerische Mathematik by Springer Verlag 1979*, vol. 31, pág. 377-403, 1979.
- De Boor, K. *A Practical Guide to Splines*. 2000, Springer-Verlag, Nueva York, 1978.
- De La Grandville, O. *Bond pricing and portfolio analysis: protecting investors in the long run*. MIT Press, Cambridge, 2000.
- Eilers, P.H.C. & Marx, B.D. Octubre 2010-última actualización. *Splines, Knots, and penalties* [Homepage of John Wiley & Sons, Inc.], [Online]. Disponible en: [www.wiley.com/wires/compstats](http://www.wiley.com/wires/compstats) [2010, 12/11/2010].
- Febrero-Bande, M. «A Present Overview on Functional Data Analysis». *Boletín de la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa*, vol. 24, no. 1, pág. 7-14, 2008.
- Insolera, F. *Curso de Matemática Financiera y Actuarial*. Aguilar, S.A. de Ediciones, Madrid, 1916.
- Jevons, W.S. *The Theory of Political Economy*. 5a ed. Kelley & Millman, Nueva York, 1957.
- Lóbez Urquía, J. *Matemática financiera con nociones de cálculo actuarial*. Gráficas Instar, Barcelona, 1968.
- Navarro, V. *Análisis de datos funcionales. Implementación y aplicaciones*. Proyecto final de carrera: Facultad de Matemáticas y Estadística (UPC) edn, Barcelona, 2004.
- Paluszny, M., Prautzsch, H. & Boehm, W. *Métodos de Bézier y B-Splines*. edición en castellano, Springer Verlag Berlín, Universitätsverlag Karlsruhe, 2002.
- Ramsay, J.O. & Silverman, B.W. *Functional data analysis*. 2nd edn, Springer, Nueva York, 2005.
- Svensson, L. , «Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson and Siegel Method». *Sveriges Risbank Quarterly Review*, vol. 3, no. 1995, pág. 13, 1995.
- Villazón, C. & Sanou, L. *Matemática financiera*. 1a ed, Foro Científico, Barcelona, 1993.

## PROGRAMARIO UTILIZADO

Los cálculos necesarios para encontrar las *B-splines* y otros instrumentos estadísticos y computacionales utilizados en este trabajo se han realizado con el programa de libre acceso: **R Foundation for Statistical Computing**, Viena, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.

Hemos utilizado los siguientes paquetes: `pkgfda`, `pkgsplines`, `pkgzoo`, `pkgtdtk`

## AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer al Dr. Antonio Terceño y al evaluador anónimo por sus comentarios y sugerencias.

## SOBRE LOS AUTORES

**Lina Sanou Vilarrodona**  
Doctor en Ciencias Económicas  
Catedrática EU jubilada de Estadística  
Profesora de la UAB

**Cèsar Villazón Hervàs**  
Doctor en Ciencias Políticas, Económicas y Comerciales  
Catedrático EU jubilado de Matemática Financiera  
Profesor de la UAB

La responsabilidad de las opiniones emitidas en este documento corresponden exclusivamente a sus autores. ODF no se identifica necesariamente con estas opiniones.

© Fundació Privada Institut d'Estudis Financers. Reservados todos los derechos.